

06 Gelijkvormige figuren en homothetie

CORRECTIESLEUTEN



Inhoud

- gelijkvormige figuren
- homothetie en gelijkvormigheid
- gelijkvormigheidskenmerken bij driehoeken
- toepassingen
- Signaal oefeningen
- Differentiatietraject
- Studiewijzer



WAT JE AL KUNT

- figuren op schaal tekenen
- berekeningen uitvoeren door gebruik te maken van een schaal
- congruente figuren tekenen door het uitvoeren van een spiegeling om een as, een verschuiving volgens een vector, een rotatie over een hoek of een spiegeling om een punt
- meetkundige eigenschappen bewijzen door gebruik te maken van congruentie(kenmerken)



WAT JE LEERT IN DEZE MODULE

- gelijkvormige vlakke figuren en gelijkvormige ruimtefiguren herkennen
- de gelijkvormigheidsfactor berekenen bij gelijkvormige figuren
- de lengte en oppervlakte van vlakke figuren en het volume van ruimtefiguren berekenen bij een gegeven gelijkvormigheidsfactor
- met ICT gelijkvormige figuren tekenen o.a. door gebruik te maken van een homothetie
- de gelijkvormigheidskenmerken voor driehoeken onderzoeken, formuleren en toepassen

- meetkundige eigenschappen aantonen door gebruik te maken van gelijkvormigheid, o.a. evenredigheid van lengten van lijnstukken en gelijkheid van hoeken



IN DE KIJKER

Je hebt aandacht voor het illustreren van de wiskunde op een tekening en je kan zelfstandig een bewijs opbouwen.



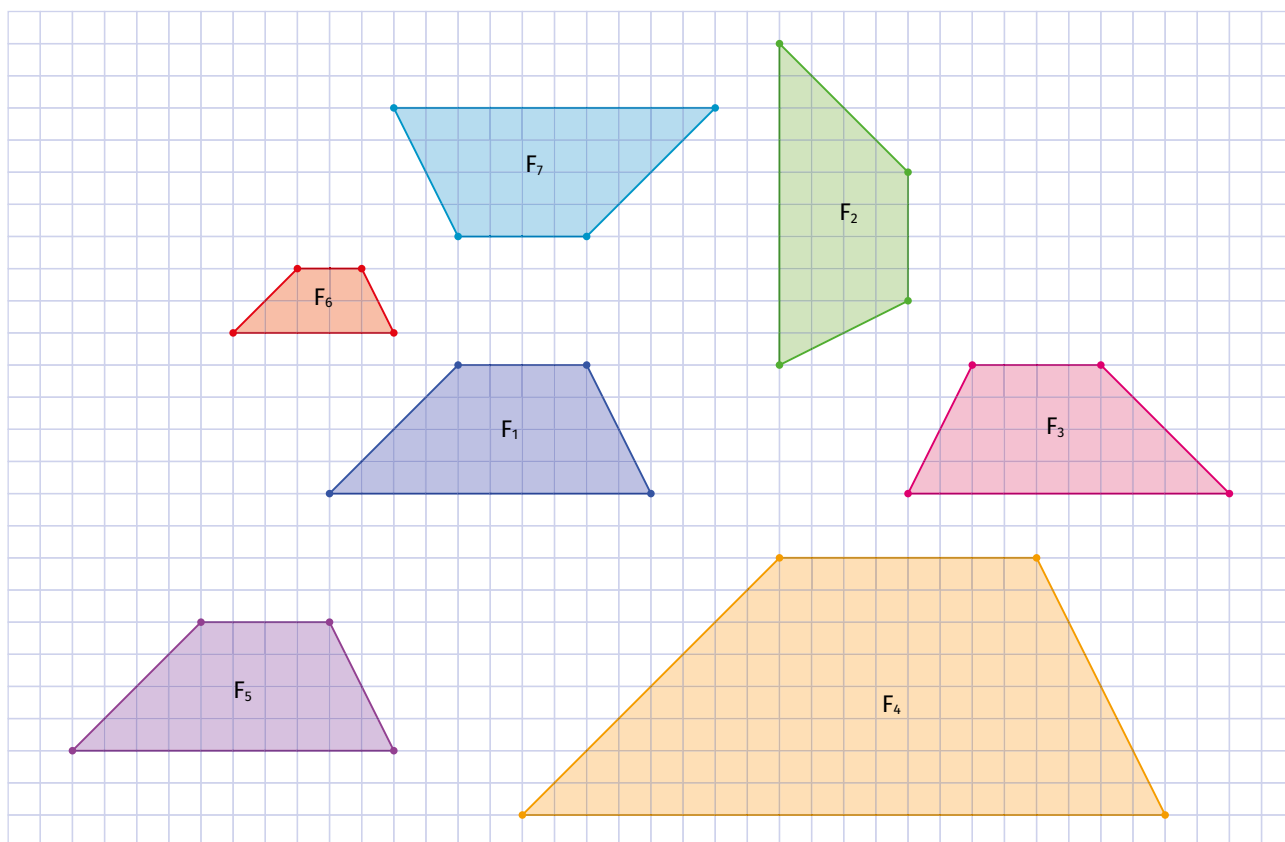
WISKUNDETAAL

- schaal
- gelijkvormig
- $\sim$
- overeenkomstige zijden
- overeenkomstige hoeken
- gelijkvormigheidsfactor
- homothetie
- homothetische figuur
- gelijkvormigheidskenmerk
- HH
- $\frac{Z}{Z} \frac{H}{H} \frac{Z}{Z}$
- $\frac{Z}{Z} \frac{Z}{Z} \frac{Z}{Z}$
- midden van een lijnstuk
- middenparallel



Opdracht 1

Met ICT werden een aantal beelden van F door een transformatie bepaald. Vervolledig de tekst op basis van de gegeven figuur.



F_1 , F_2 , F_3 , F_5 en F_7 zijn congruente figuren. Zij hebben dezelfde **vorm** en dezelfde **grootte** .

- F_3 is het beeld van F_1 door een spiegeling om een as.
- F_5 is het beeld van F_1 door een verschuiving over een vector
- F_2 is het beeld van F_1 door een rotatie over een hoek.
- F_7 is het beeld van F_1 door een spiegeling om een punt.

F_4 en F_6 zijn schaaltekeningen van F_1 . Deze drie figuren hebben wel **dezelfde** vorm, maar **niet dezelfde** grootte.

Je verkrijgt F_4 door F_1 op schaal **2 : 1** te tekenen. De nieuwe figuur is **groter** dan de oorspronkelijke.

Je verkrijgt F_6 door F_1 op schaal **1 : 2** te tekenen. De nieuwe figuur is **kleiner** dan de oorspronkelijke.

Vorig jaar zag je transformaties waarvan het beeld van een figuur onder die transformatie een congruente figuur was. Je kan ook een transformatie uitvoeren zodat het beeld enkel dezelfde vorm heeft: een **homothetie**.

Opdracht 2

Op een populaire webshop kun je de volledige Rubiks Cube familie bestellen. De grootste Rubiks Cube (professor) is een schaalmodel van de eerste (met schaal 2:1). Vervolledig de tabel aan de hand van de gegeven informatie.

	AFMETING	OPPERVLAKTE ZIJVLAK	VOLUME
a	3,5 cm x 3,5 cm x 3,5 cm	12,25 cm ²	42,875 cm ³
b	5,7 cm x 5,7 cm x 5,7 cm	32,49 cm ²	185,193 cm ³
c	6,5 cm x 6,5 cm x 6,5 cm	42,25 cm ²	274,625 cm ³
d	7 cm x 7 cm x 7 cm	49 cm ²	343 cm ³

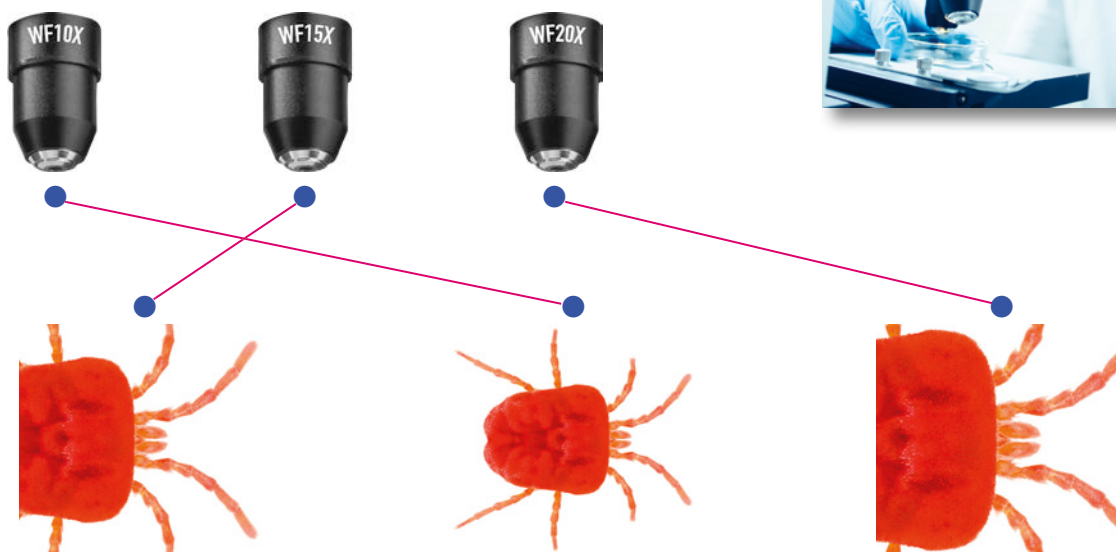


© Marco Verch

Opdracht 3

Een microscoop laat je toe om kleine dingen te vergroten.

De gebruikte schaal vind je terug op het oculair. Dat oculair kan je vervangen door een ander oculair. Een oogstmijt (een klein rood spinnetje) komt onder de microscoop te liggen. Je kijkt door de microscoop en verandert het oculair. Welk oculair zorgt voor welke vergroting?



Opdracht 4

Deze Ferrari is op schaal 1 : 18 gemaakt. De werkelijke Ferrari is 199 cm breed en 1,12 m hoog.

Bepaal de breedte en de hoogte van dit schaalmodel op 1 cm nauwkeurig.

$$b = 199 \text{ cm} \cdot \frac{1}{18}$$

$$b \approx 11 \text{ cm}$$

$$h = 1,12 \text{ m} \cdot \frac{1}{18}$$

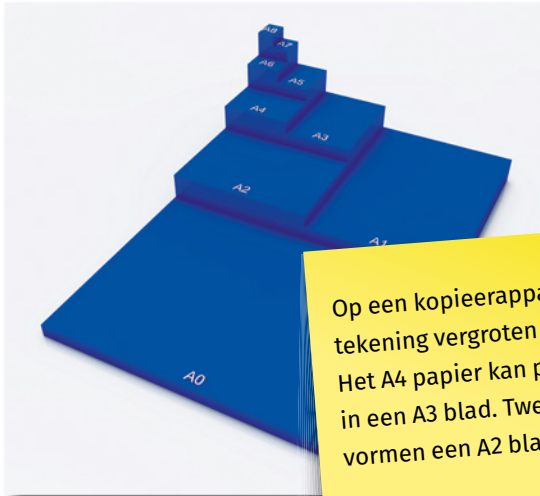
$$h = 112 \text{ cm} \cdot \frac{1}{18}$$

$$h \approx 6 \text{ cm}$$



1 Gelijkvormige figuren

1.1 Definitie



Op een kopieerapparaat kan je een tekening vergroten of verkleinen. Het A4 papier kan perfect twee keer in een A3 blad. Twee A3 bladen vormen een A2 blad.



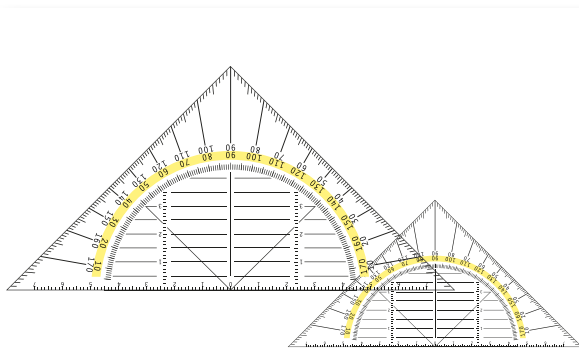
Deze man maakt een schaalmodel van een vliegtuig. Het echte vliegtuig heeft dezelfde vorm, maar is enkele keren groter.



In Madurodam zie je huizen, treinstations en luchthavens op schaal nagebouwd. De gebruikte schaal in Madurodam is 1:25.



Een architect maakt vaak een schaalmodel van een appartement voor het te bouwen. De werkelijkheid is hier verkleind weergegeven.



Jouw geodriehoek is een miniversie van de geodriehoek van de leerkracht. Deze zijn gelijkvormig.



Ook wiskundige figuren kunnen gelijkvormig zijn. Zo zijn alle bollen gelijkvormig. Ook alle vierkanten zijn onderling gelijkvormig.

Dit zijn allemaal voorbeelden van **gelijkvormige figuren**.

Als je een tekening op schaal maakt, krijg je een gelijkvormige figuur. De gebruikte schaal noemen we ook de **gelijkvormigheidsfactor**.



— **Merk op** —

- Bij een vergroting is de gelijkvormigheidsfactor groter dan 1.
- Bij een verkleining is de gelijkvormigheidsfactor kleiner dan 1.

definitie

Gelijkvormige figuren zijn figuren waarvan de ene figuur een weergave op schaal is van de andere figuur.

SYMBOL: $\sim$

Dit lees je als: '... is gelijkvormig met ...'

Op de figuur zijn de oranje en de blauwe vierhoek gelijkvormig.

We noteren dit als volgt: $ABCD \sim EFGH$.

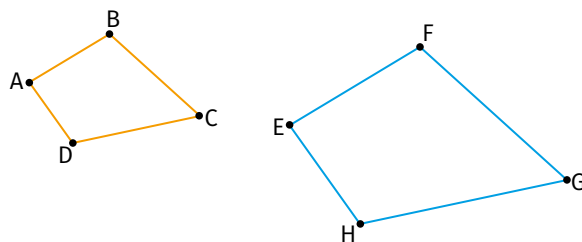
Net zoals bij congruente figuren spreken we over overeenkomstige zijden en overeenkomstige hoeken.

De **overeenkomstige zijden** zijn:

[AB] en [EF] [BC] en [FG] [CD] en [GH] [AD] en [EH]

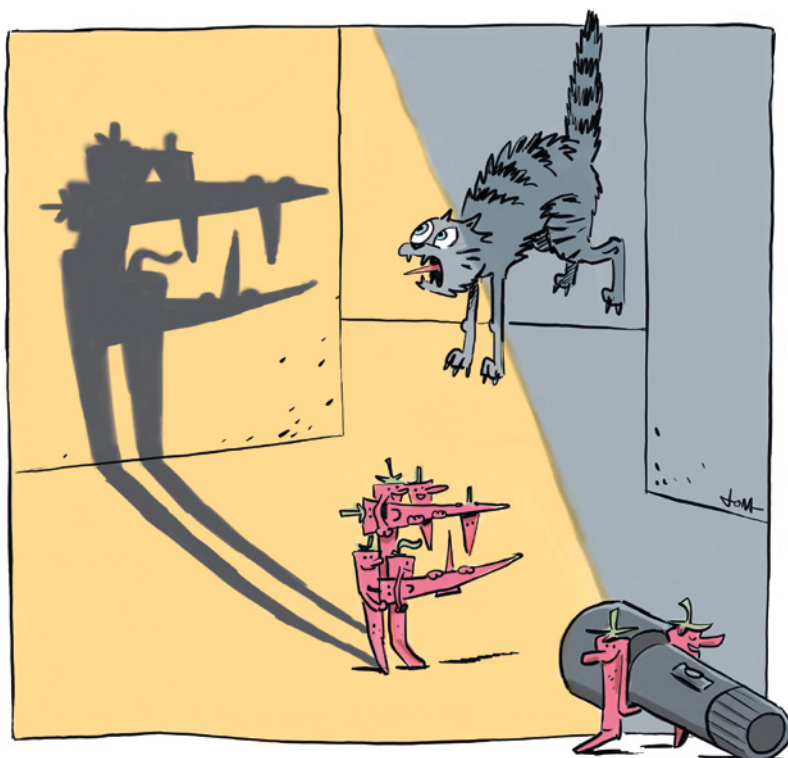
De **overeenkomstige hoeken** zijn:

$\hat{A}$ en $\hat{E}$ $\hat{B}$ en $\hat{F}$ $\hat{C}$ en $\hat{G}$ $\hat{D}$ en $\hat{H}$



— **Merk op** —

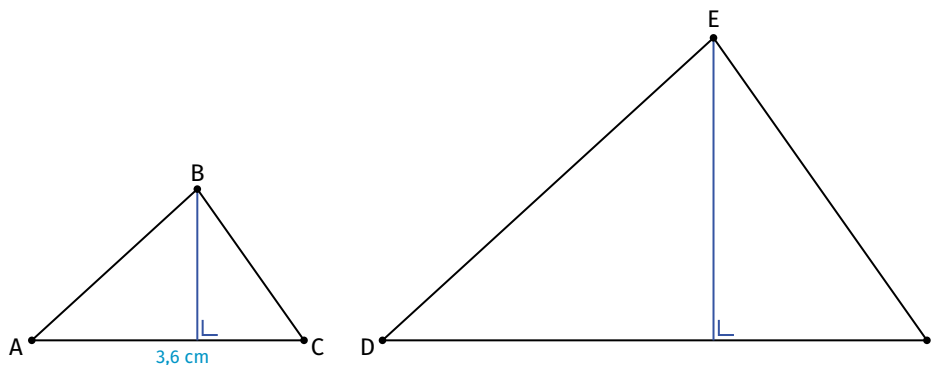
- De overeenkomstige hoekpunten van gelijkvormige figuren worden **altijd** in dezelfde volgorde genoteerd.
- Figuren die identiek zijn (deze zijn dus niet vergroot of verkleind) noemen we congruente figuren. De gebruikte schaal is 1 : 1, de gelijkvormigheidsfactor is 1.



1.2 Lengte en oppervlakte bij gelijkvormige figuren

A) Lengtes bepalen

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ met gelijkvormigheidsfactor 3.



- Je kan eenvoudig de lengte van een overeenkomstige zijde bepalen. Om bijvoorbeeld $|DF|$ te bepalen, vul je de gekende gegevens in.

$$\frac{|DF|}{3,6 \text{ cm}} = 3$$

$$|DF| = 3 \cdot 3,6 \text{ cm}$$

$$|DF| = 10,8 \text{ cm}$$

- We kunnen een verband voor de omtrek noteren:

$$\begin{aligned} p_{\triangle DEF} &= |DE| + |EF| + |DF| \\ &= 3 \cdot |AB| + 3 \cdot |BC| + 3 \cdot |AC| \\ &= 3 \cdot (|AB| + |BC| + |AC|) \\ &= 3 \cdot p_{\triangle ABC} \end{aligned}$$

De verhouding van de omtrekken is: $\frac{p_{\triangle DEF}}{p_{\triangle ABC}} = 3$

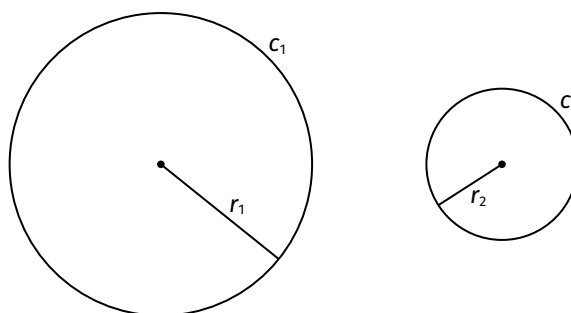
Algemeen

De verhouding van de omtrek van twee gelijkvormige vlakke figuren is gelijk aan de gelijkvormigheidsfactor.



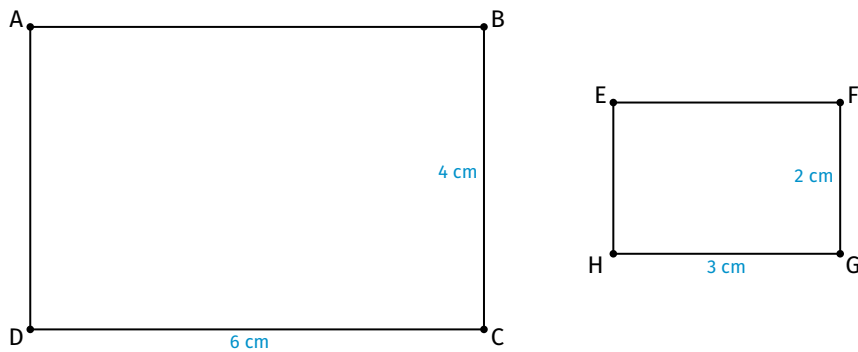
— Merk op —

Ook bij twee gelijkvormige cirkels c_1 en c_2 met gelijkvormigheidsfactor k kunnen we gelijkaardige berekeningen doen voor de straal en de omtrek.



B) Oppervlaktes bepalen

rechthoek ABCD $\sim$ rechthoek EFGH met gelijkvormigheidsfactor $\frac{1}{2}$



$$\begin{aligned} A_{\text{rechthoek ABCD}} &= 6 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} \\ &= 24 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{rechthoek EFGH}} &= 3 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} \\ &= 6 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{1}{4}$$

We kunnen noteren dat:

$$\begin{aligned} A_{\text{rechthoek EFGH}} &= |GH| \cdot |EH| \\ &= k \cdot |CD| \cdot k \cdot |AD| \\ &= k^2 \cdot |CD| \cdot |AD| \\ &= k^2 \cdot A_{\text{rechthoek ABCD}} \end{aligned}$$

De verhouding van de oppervlaktes is: $\frac{A_{\text{rechthoek EFGH}}}{A_{\text{rechthoek ABCD}}} = k^2$

Algemeen

De verhouding van de oppervlakte van twee gelijkvormige vlakke figuren is gelijk aan het kwadraat van de gelijkvormigheidsfactor.



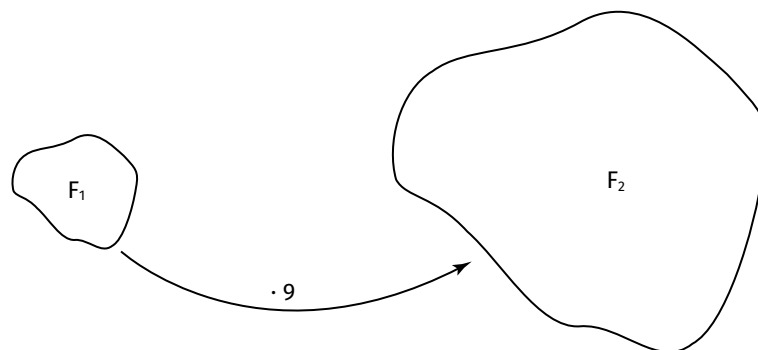
• Merk op •

We kunnen deze redenering toepassen voor elk paar gelijkvormige vlakke figuren.

$$A_{\text{figuur 2}} = k^2 \cdot A_{\text{figuur 1}}$$

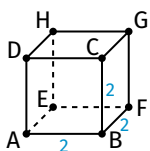
$$A_{\text{figuur 2}} = 3^2 \cdot 2 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{figuur 2}} = 18 \text{ cm}^2$$

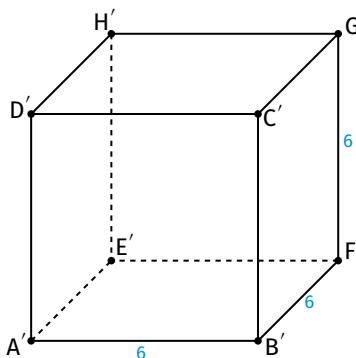


1.3 Volume bij gelijkvormige figuren

$$k = 3$$



$$\begin{aligned} V_{\text{kubus 1}} &= 2 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} \\ &= 8 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V_{\text{kubus 2}} &= 6 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} \\ &= 216 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

· 27

We kunnen noteren dat:

$$\begin{aligned} V_{\text{kubus 2}} &= |A'B'|^3 \\ &= (k \cdot |AB|)^3 \\ &= k^3 \cdot |AB|^3 \\ &= k^3 \cdot V_{\text{kubus 1}} \end{aligned}$$

De verhouding van de volumes is: $\frac{V_{\text{kubus 2}}}{V_{\text{kubus 1}}} = k^3$

Algemeen

De verhouding van het volume (de inhoud) van twee gelijkvormige ruimtefiguren is gelijk aan de derdemacht van de gelijkvormigheidsfactor.



— Merk op —

We kunnen deze redenering toepassen voor elk paar gelijkvormige ruimtefiguren (lichamen).

Onder andere bij 3D-printing is het belangrijk op voorhand toch het volume van het gecreëerde 3D-object te berekenen of in te schatten.

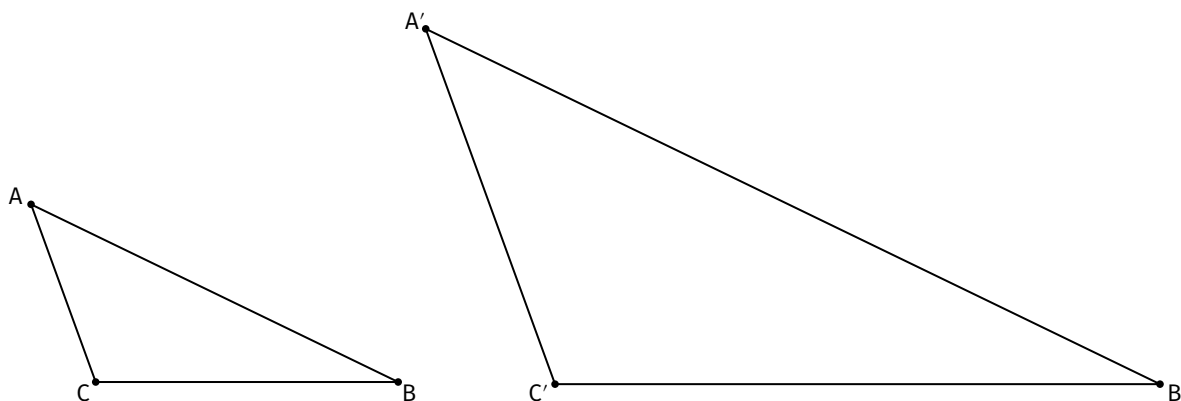


1.4 Gelijkvormige driehoeken

Niet alle driehoeken zijn gelijkvormig. Maar als ze wel gelijkvormig zijn, dan is er meer aan de hand. Hieronder vind je twee gelijkvormige driehoeken.

notatie $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Dit lees je als: 'driehoek ABC is gelijkvormig met driehoek A'B'C'.



schaal 2 : 1

- Meet de lengte van elke zijde en de grootte van de drie hoeken van de twee driehoeken. Noteer je resultaten op de figuur.
- Wat kan je besluiten over de grootte van de overeenkomstige hoeken?
- Wat kan je besluiten over de lengtes van de overeenkomstige zijden?

definitie

IN WOORDEN

Twee driehoeken zijn gelijkvormig **als en slechts als** hun overeenkomstige hoeken even groot zijn en hun overeenkomstige zijden dezelfde verhouding hebben.

IN SYMBOLEN

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \iff \begin{cases} \hat{A} = \hat{A'} \text{ en } \hat{B} = \hat{B'} \text{ en } \hat{C} = \hat{C'} \\ \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} \end{cases}$$

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = k \leftarrow \text{de gelijkvormigheidsfactor}$$



— **Merk op** —

- Net als bij congruente driehoeken is de plaats van de letters belangrijk.

overeenkomstige
hoeken
 $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$
overeenkomstige
hoeken

- Om de gelijkvormigheidsfactor te berekenen moet je altijd de lengtes van de tweede driehoek ($\Delta A'B'C'$) delen door de lengtes van de eerste driehoek (ΔABC).



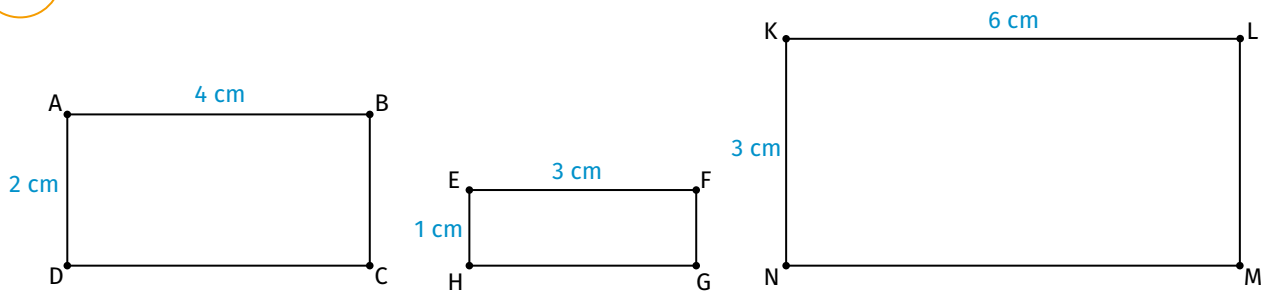
Verwerkingsopdrachten



1, 2, 3, 4

1

Welke van onderstaande rechthoeken zijn gelijkvormig? Verklaar.



$ABCD \sim KLMN$

De gebruikte gelijkvormigheidsfactor is $\frac{3}{2}$.

2

a) Hoe lees je deze uitspraak: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$?

Driehoek ABC is gelijkvormig met driehoek DEF.

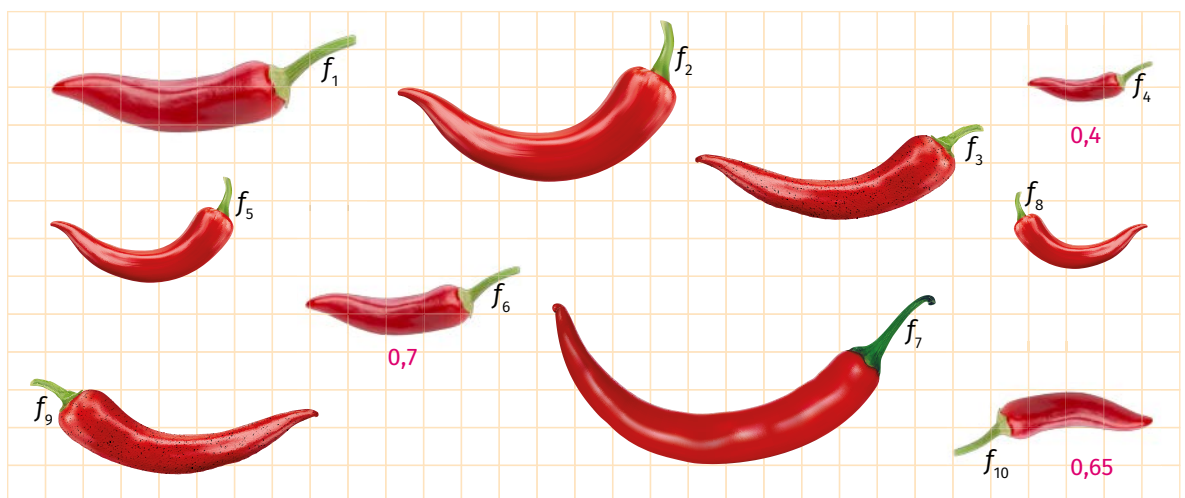
b) Noteer in symbolen: de vierhoek EFGH is gelijkvormig met vierhoek JKLM.

$EFGH \sim JKLM$

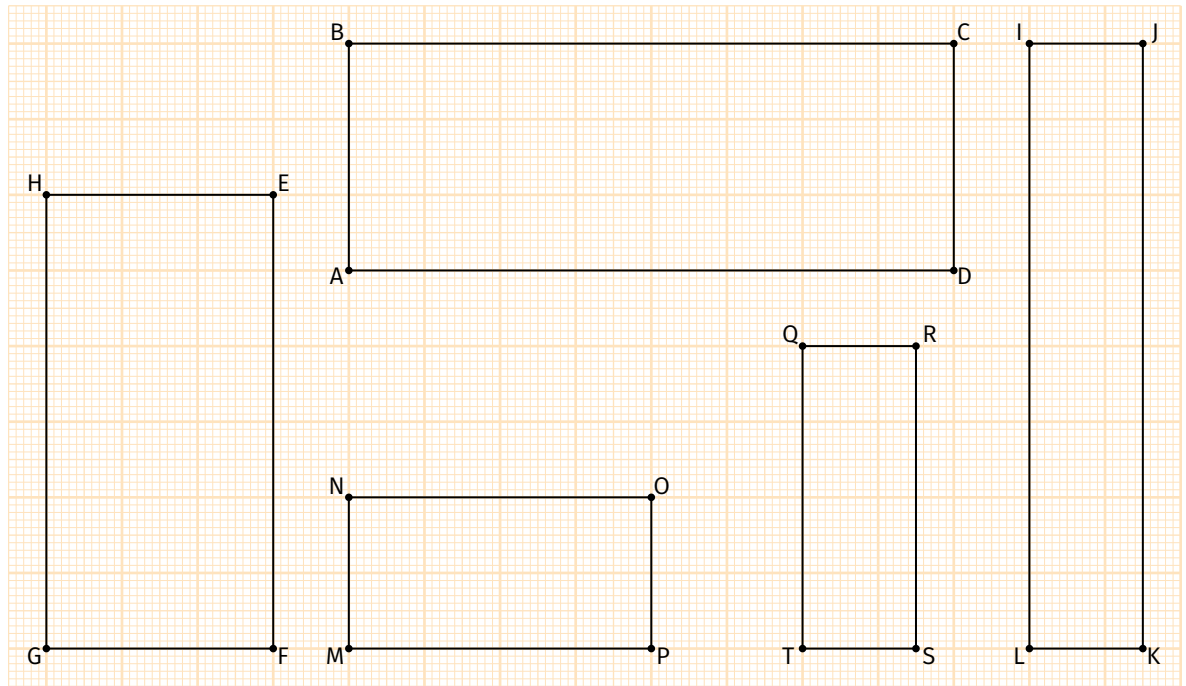
3

a) Welke figuren zijn gelijkvormig met figuur f_1 ? f_4, f_6 en f_{10}

b) Noteer onder elke figuur die gelijkvormig is met f_1 de gelijkvormigheidsfactor k .



4

Welke rechthoeken zijn gelijkvormig met elkaar? ABCD en QRST, EFGH en NOPM

5

Twee balken zijn gelijkvormig met gelijkvormigheidsfactor 1,5. Beantwoord de bijhorende vragen.

- a) De oppervlakte van de mantel van de kleinste balk is 48 cm^2 . Bepaal de oppervlakte van de mantel van de grootste balk.

Oppervlakte van de mantel van de grootste balk $= k^2 \cdot$ oppervlakte van de mantel van de kleinste balk

$$= k^2 \cdot 48 \text{ cm}^2$$

$$= 1,5^2 \cdot 48 \text{ cm}^2$$

$$= 108 \text{ cm}^2$$

Antwoord: De oppervlakte van de mantel van de grootste balk is 108 cm^2 .

- b) De inhoud van de kleinste balk is 20 cm^3 . Bepaal de oppervlakte van de grootste balk.

Inhoud van de grootste balk $= k^3 \cdot$ inhoud van de kleinste balk

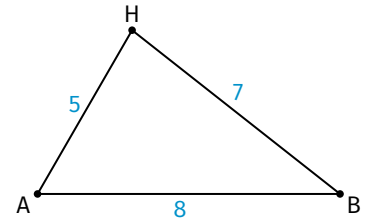
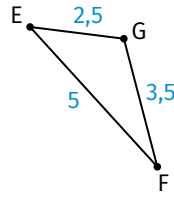
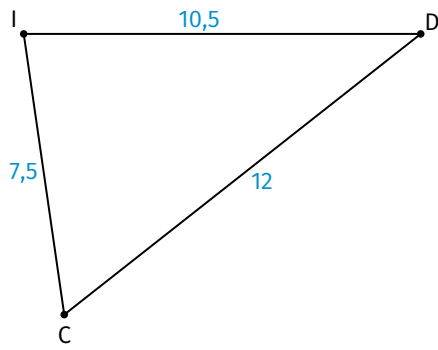
$$= k^3 \cdot 20 \text{ cm}^3$$

$$= 1,5^3 \cdot 20 \text{ cm}^3$$

$$= 67,5 \text{ cm}^3$$

Antwoord: De inhoud van de grootste balk is $67,5 \text{ cm}^3$.

6



a) Welke driehoek is gelijkvormig met driehoek AHB? $\triangle CID$

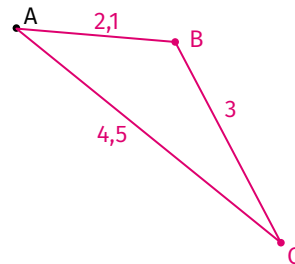
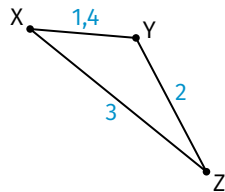
b) Noteer dit correct in symbolen. $\triangle AHB \sim \triangle CID$

c) Bepaal de gelijkvormigheidsfactor k .

$$k = \frac{|CI|}{|AH|} = \frac{|DI|}{|BH|} = \frac{|CD|}{|AB|} = 1,5$$

7

a) Teken $\triangle ABC$ als je weet dat $\triangle XYZ \sim \triangle ABC$ en de gelijkvormigheidsfactor 1,5 is.



b) Vervolledig de gelijkheden aan de hand van de definitie van gelijkvormige driehoeken.

De overeenkomstige zijden hebben dezelfde verhouding: $\frac{|AB|}{|XY|} = \frac{|BC|}{|YZ|} = \frac{|AC|}{|XZ|}$

en

De overeenkomstige hoeken zijn even groot: $\widehat{A} = \widehat{X}$, $\widehat{B} = \widehat{Y}$ en $\widehat{C} = \widehat{Z}$

2 Homothetie en gelijkvormigheid

2.1 Isometrieën en congruente figuren

Je leerde in het tweede jaar al om grafisch het beeld te bepalen van een vlakke figuur ...

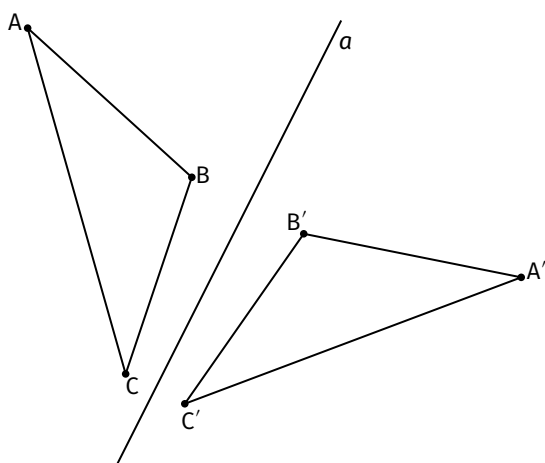
- door te spiegelen om een as.
- door te verschuiven over een vector.
- door te roteren over een hoek.
- door te spiegelen om een punt.

Het beeld van een vlakke figuur door één van deze transformaties, of een samenstelling van meerdere van deze transformaties, was steeds een vlakke figuur die **congruent** is met de oorspronkelijke figuur.

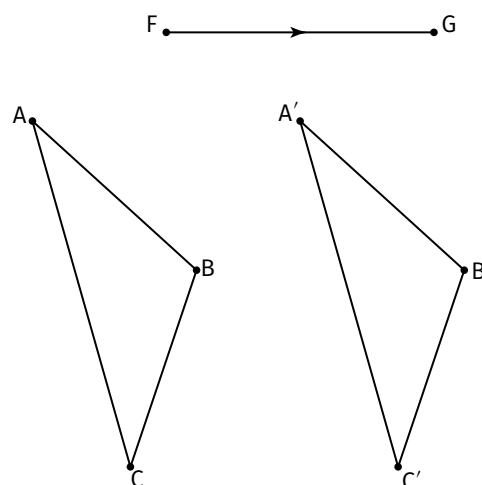
definitie Een **isometrie** is een transformatie die een vlakke figuur afbeeldt op een congruente vlakke figuur.

Voorbeelden

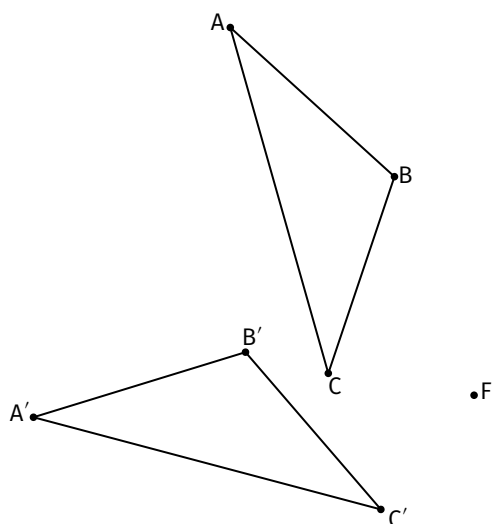
spiegelen om een as



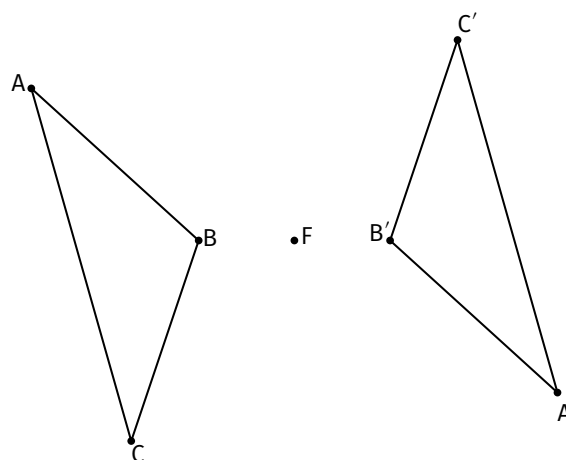
verschuiven volgens een vector



roteren over een hoek



spiegelen om een punt



2.2 Homothetieën

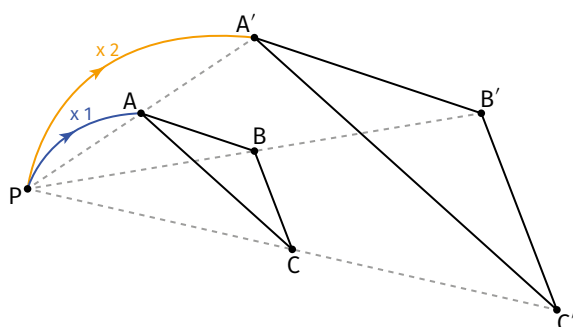
Er bestaan nog andere transformaties van het vlak.

definitie Een **homothetie** is een transformatie die een vlakke figuur afbeeldt op een gelijkvormige figuur.

Je kunt met meetkundesoftware het beeld van een vlakke figuur bepalen door een homothetie. Je hebt hiervoor het centrum en een factor nodig. De factor k is een reëel getal.

Voorbeelden

$\triangle ABC$ wordt door een **homothetie** met **centrum P** en **factor 2** afgebeeld op $\triangle A'B'C'$.

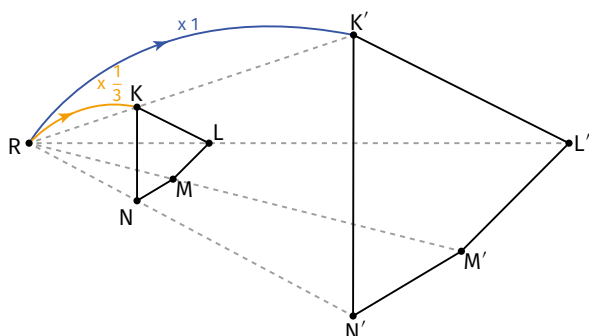


$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

$\triangle A'B'C'$ is een vergroting van $\triangle ABC$ met **factor 2**.

$\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$ zijn **homothetische figuren**.

$KLMN$ wordt door een **homothetie** met **centrum R** en **factor $\frac{1}{3}$** afgebeeld op $K'L'M'N'$.



$$KLMN \sim K'L'M'N'$$

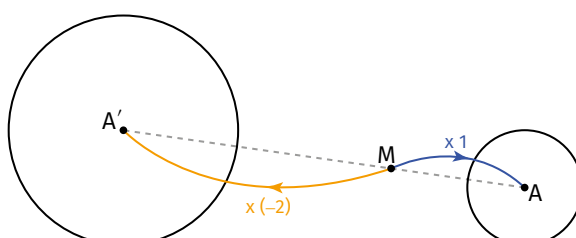
$K'L'M'N'$ is een verkleining van $KLMN$ met **factor $\frac{1}{3}$** .

$KLMN$ en $K'L'M'N'$ zijn **homothetische figuren**.



— Merk op —

- Het beeld is een schaalmodel van de originele figuur.
- De factor van een homothetie wordt bepaald ten opzichte van het centrum van de homothetie.
- Als het beeld van een vlakke figuur door een homothetie samenvalt met de originele figuur, dan is de factor 1 en zijn deze figuren samenvallend en congruent.
- De factor van een homothetie kan ook negatief zijn.



2.3 Eigenschappen van homothetieën

Wanneer je grafisch het beeld van een vlakke figuur door een **homothetie** h met **centrum** P en **factor** r weergeeft, dan stel je een aantal eigenschappen vast.

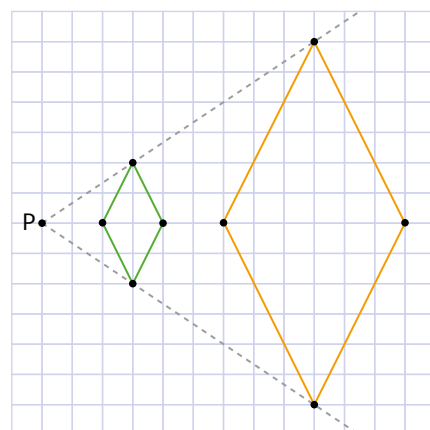
eigen-
schappen

Een homothetie met factor r bewaart de hoekgrootte.

Een homothetie met factor r beeldt een rechte af op een evenwijdige rechte.

Een homothetie met factor r beeldt een lijnstuk $[AB]$ af op een lijnstuk $[A'B']$ zodat $\frac{|A'B'|}{|AB|} = |r|$.

Een homothetie met factor r beeldt een vlakke figuur met oppervlakte A af op een gelijkvormige vlakke figuur met oppervlakte A' zodat $\frac{A'}{A} = r^2$.



De eigenschappen kun je gebruiken bij een aantal meetkundige toepassingen en om constructies uit te voeren.

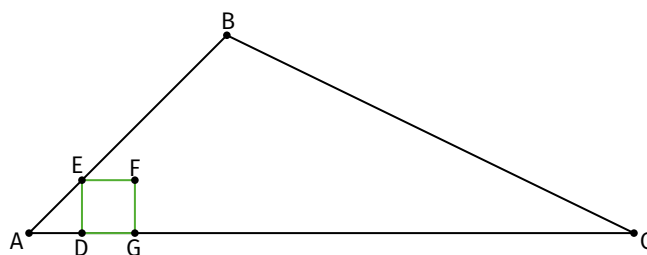
Voorbeeld

Teken een vierkant HIJK in een gegeven driehoek ABC waarbij een zijde van het vierkant op een zijde van de driehoek ligt en de andere hoekpunten op de twee andere zijden van de driehoek liggen.

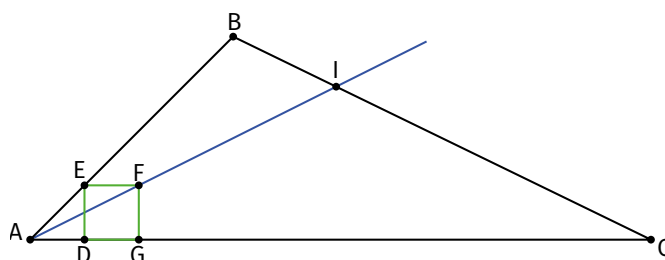
Gegeven: $\triangle ABC$

Kies een willekeurig punt E zodat $E \in [AB]$.

Teken een vierkant EFGD waarbij $D \in [AC]$ en $G \in [AC]$.



Teken de halfrechte $[AF]$. Het punt I is het snijpunt van $[AF]$ met $[BC]$.

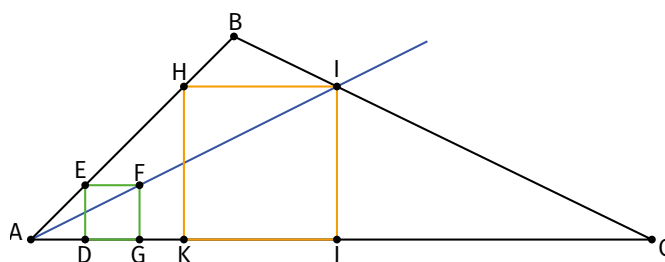


Door gebruik te maken van de eigenschappen van homothetieën kun je het vierkant HIJK tekenen.

$IJ \parallel FG$

$HI \parallel EF$

$HK \parallel ED$





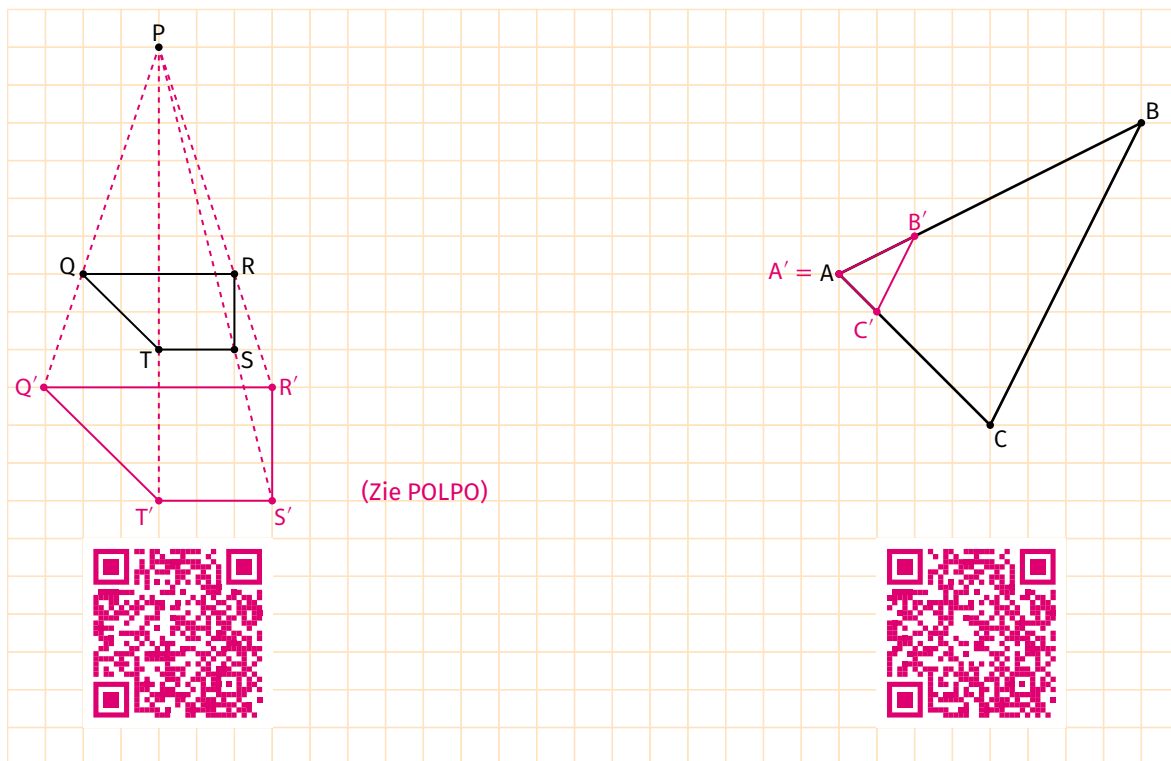
Verwerkingsopdrachten



8

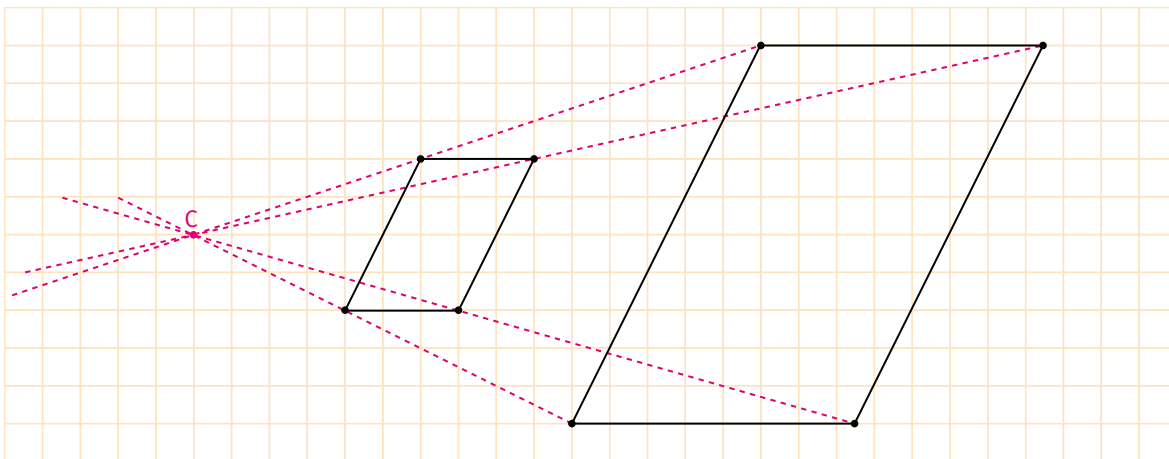
Bepaal met behulp van ICT het beeld van de vlakke figuren ...

- a) door een homothetie met centrum P en factor 1,5. b) door een homothetie met centrum A en factor 0,25.



9

Bepaal het centrum en de factor van de homothetie.



De factor is $\frac{2}{5}$ of $\frac{5}{2}$ (afhankelijk van welke figuur je als origineel beschouwt).

3 Gelijkvormigheidskenmerken bij driehoeken

In de definitie van gelijkvormige driehoeken heb je zes gelijkheden. We kunnen zoals bij congruentie op zoek gaan naar kenmerken. Twee driehoeken zijn gelijkvormig als en slechts als hun overeenkomstige hoeken even groot zijn en hun overeenkomstige zijden dezelfde verhouding hebben.

Op basis van een 'beperkt' aantal gelijkheden kan je dan besluiten dat de driehoeken gelijkvormig zijn: de **gelijkvormigheidskenmerken**.

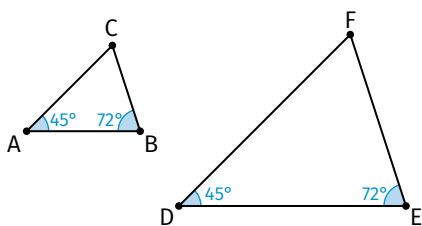
3.1 Kenmerk HH

kenmerk

IN WOORDEN

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als twee hoeken van de eerste driehoek even groot zijn als twee hoeken van de tweede driehoek.

Voorbeeld



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{E} \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

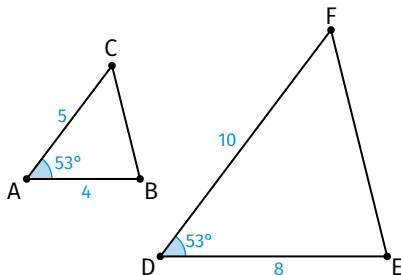
3.2 Kenmerk $\frac{Z}{Z}H\frac{Z}{Z}$

kenmerk

IN WOORDEN

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als twee paar zijden een evenredigheid vormen en zij een even grote ingesloten hoek hebben.

Voorbeeld



$$\left. \begin{array}{l} \frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DF|}{|AC|} \\ \hat{A} = \hat{D} \end{array} \right\} \xRightarrow{\frac{Z}{Z}H\frac{Z}{Z}} \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

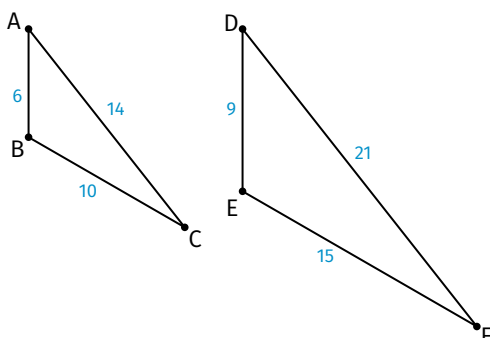
3.3 Kenmerk $\frac{ZZZ}{ZZZ}$

kenmerk

IN WOORDEN

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als alle overeenkomstige zijden evenredig zijn.

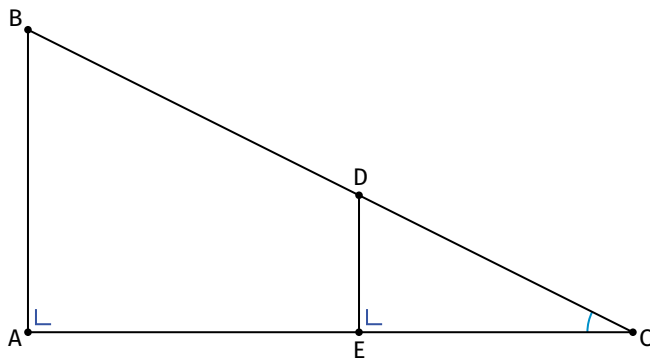
Voorbeeld



$$\left. \frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DF|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|BC|} \right\} \xRightarrow{\frac{ZZZ}{ZZZ}} \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

3.4 Bewijzen met gelijkvormigheidskenmerken

Toon aan dat $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ gelijkvormig zijn.



Gegeven: $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$
 $\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$

Te bewijzen: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Bewijs:

In $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{E} = 90^\circ \quad (\text{rechte hoek}) \\ \hat{C} = \hat{C} \quad (\text{gemeenschappelijke hoek}) \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

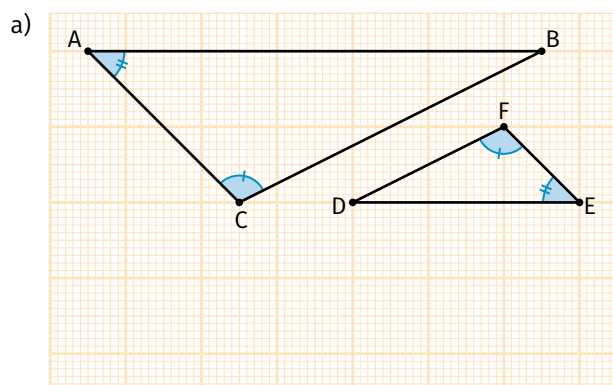


Verwerkingsopdrachten

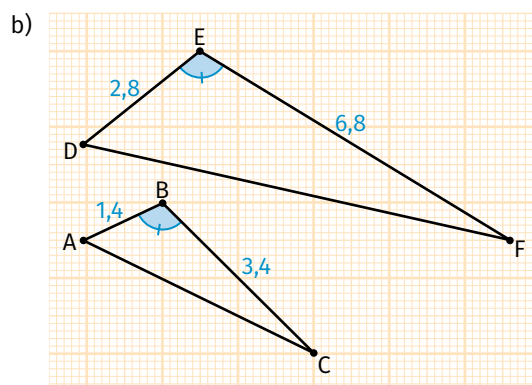


10

Noteer in symbolen onder elke tekening het gelijkvormigheidskenmerk dat wordt geïllustreerd.



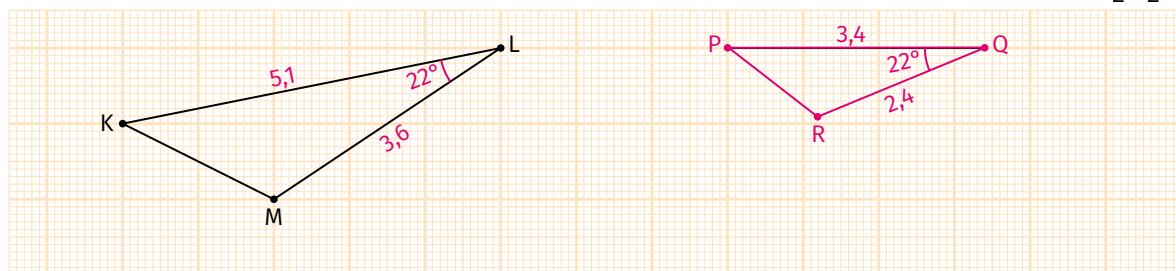
HH



$\frac{Z}{Z} \frac{H}{H} \frac{Z}{Z}$

11

Teken een driehoek PQR die gelijkvormig is met driehoek KLM door gebruik te maken van het kenmerk $\frac{Z}{Z} \frac{H}{H} \frac{Z}{Z}$.



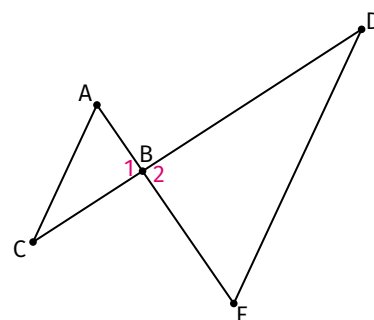
12

Toon aan dat $\triangle ABC \sim \triangle EBD$ als je weet dat $AC \parallel DE$.

bv.

In $\triangle ABC$ en $\triangle EBD$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \text{ (overstaande hoeken)} \\ \hat{A} = \hat{E} \text{ (verwisselende binnenhoeken)} \\ \text{bij } AC \parallel DE \text{ en snijlijn AE} \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ABC \sim \triangle EBD$$



4 Toepassingen

4.1 Lengte van een zijde berekenen bij gelijkvormige driehoeken

Bij gelijkvormige driehoeken hebben de overeenkomstige zijden dezelfde verhouding. Je kunt hiervan gebruik maken om de lengte van een zijde te berekenen.

Gegeven: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Gevraagd: $|BC|$

Oplossing:

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DF|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|BC|}$$

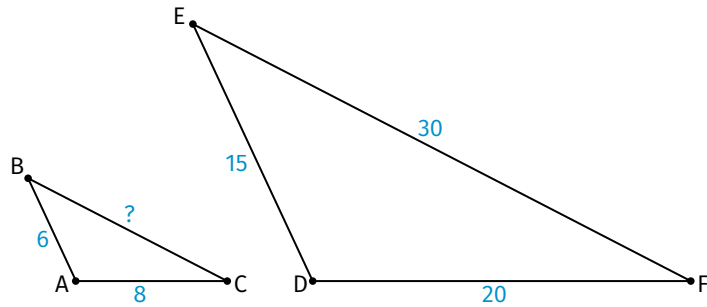
$$\frac{15}{6} = \frac{20}{8} = \frac{30}{|BC|}$$

$$20 \cdot |BC| = 8 \cdot 30$$

$$20 \cdot |BC| = 240$$

$$|BC| = \frac{240}{20}$$

$$|BC| = 12$$



Hoe bereken je de lengte van een zijde bij gelijkvormige driehoeken?

methode

STAP 1: Aantonen (indien dit niet gegeven is) dat de driehoeken gelijkvormig zijn.

STAP 2: Noteer de gelijke verhoudingen.

STAP 3: Vul in wat je weet.

STAP 4: Gebruik de hoofdeigenschap van evenredigheid.

STAP 5: Los de verkregen vergelijking op.

4.2 De hoekgrootte bepalen bij gelijkvormige driehoeken

Bij gelijkvormige driehoeken zijn de overeenkomstige hoeken even groot. Je kunt hiervan gebruik maken om de grootte van hoeken te bepalen.

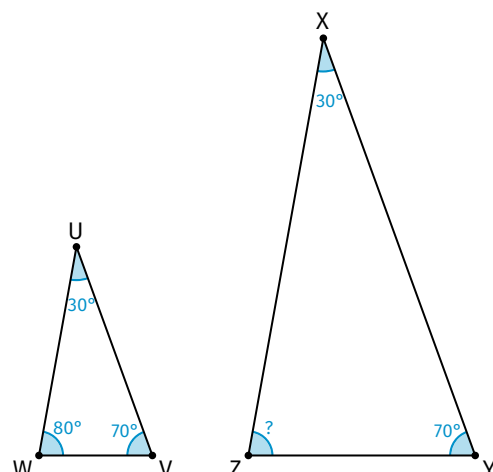
Gegeven: $\triangle UVW \sim \triangle XYZ$

Gevraagd: $\hat{Z}$

Oplossing:

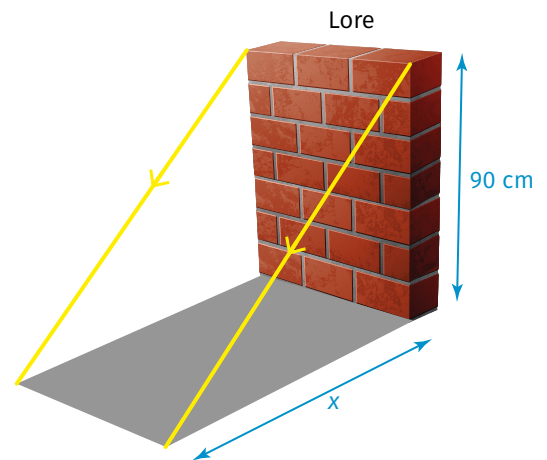
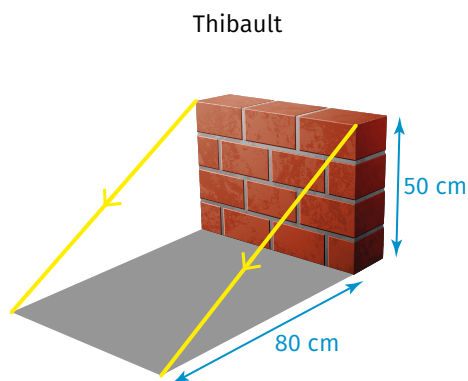
Overeenkomstige hoeken zijn even groot.

$$\hat{Z} = \hat{W} = 80^\circ$$



4.3 Toepassing in de ruimte

Thibault en Lore metsen elk een muurtje. De evenwijdige zonnestralen zorgen voor een schaduw. Het muurtje van Thibault is 50 cm hoog en zorgt om 15 uur voor een schaduw van 80 cm. Het muurtje van Lore is 90 cm hoog.



- a) Hoe lang is de schaduw van de muur van Lore om 15 uur?

Berekening: $\frac{90}{50} = \frac{x}{80}$

$$50x = 90 \cdot 80$$
$$50x = 7200$$
$$x = \frac{7200}{50}$$
$$x = 144$$

Antwoord: De lengte van de schaduw van het muurtje van Lore is 144 cm.

Vaststelling

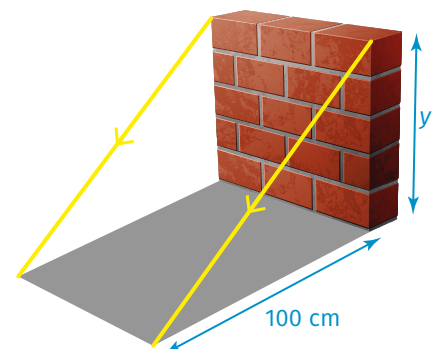
De verhouding van de schaduw van de muur en de hoogte is constant.

- b) Mauro metst een derde muurtje en meet op hetzelfde tijdstip als de anderen een schaduw van 1 m. Bepaal de hoogte van de muur die Mauro metste.

Berekening: $\frac{y}{50} = \frac{100}{80}$

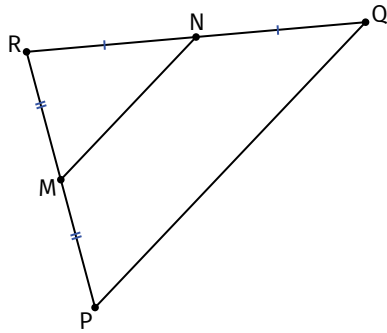
$$80y = 50 \cdot 100$$
$$80y = 5000$$
$$y = \frac{5000}{80}$$
$$y = 62,5$$

Antwoord: Het muurtje van Mauro is 62,5 cm hoog.





4.4 Toepassing: de middenparallel



[MN] is een **middenparallel** van $\triangle PQR$.

definitie Een **middenparallel** van een driehoek is een lijnstuk dat de middens van twee zijden van een driehoek verbindt.



— **Merk op** —

In een driehoek kun je drie middenparallelle tekenen.

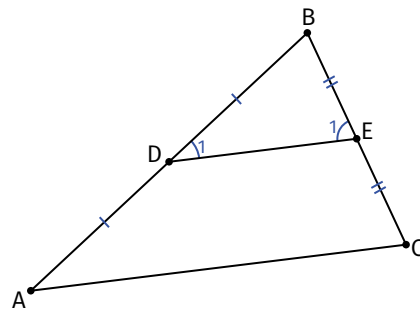
eigenschap Een middenparallel van een driehoek is evenwijdig met de derde zijde en half zo lang als de derde zijde.

Gegeven: $\triangle ABC$
D is het midden van [AB]
E is het midden van [BC]

Te bewijzen: $DE \parallel AC$
 $|DE| = \frac{1}{2} |AC|$

Bewijs: Stap 1: Voor $\triangle ABC$ en $\triangle DBE$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{B} \quad (\text{gemeenschappelijke hoek}) \\ \frac{|DB|}{|AB|} = \frac{|BE|}{|BC|} = \frac{1}{2} \quad (\text{def. midden van een lijnstuk}) \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{ZH}} \triangle ABC \sim \triangle DBE$$



Stap 2

$$\triangle ABC \sim \triangle DBE \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{A} \quad (\text{overeenkomstige hoeken in gelijkvormige driehoeken})$$

$$\Downarrow \\ DE \parallel AC \quad (\text{even grote overeenkomstige hoeken bij 2 rechten en een snijlijn})$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DBE \Rightarrow \frac{|DB|}{|AB|} = \frac{|BE|}{|BC|} = \frac{1}{2} = \frac{|DE|}{|AC|}$$

$$\Downarrow \\ |DE| = \frac{1}{2} |AC|$$



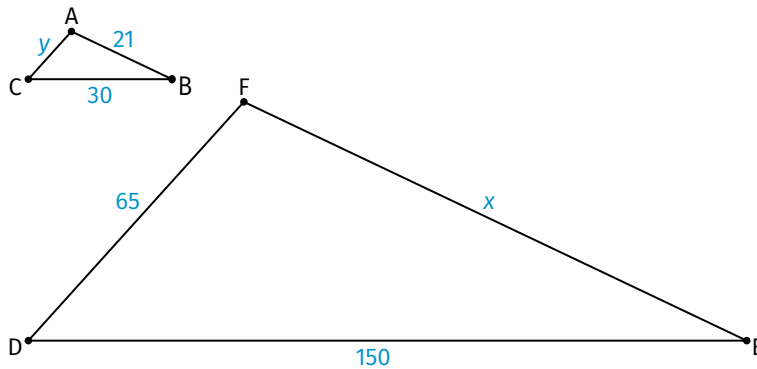
Verwerkingsopdrachten



8, 9, 10

13

Bereken x en y als je weet dat $\triangle ABC \sim \triangle FED$. Noteer je volledige berekening.



$$\frac{|DE|}{|CB|} = \frac{|FE|}{|AB|} = \frac{|DF|}{|CA|}$$

$$\frac{150}{30} = \frac{x}{21} = \frac{65}{y}$$

$$150 \cdot 21 = x \cdot 30$$

$$3150 = x \cdot 30$$

$$\frac{3150}{30} = x$$

$$105 = x$$

$$150 \cdot y = 65 \cdot 30$$

$$150 \cdot y = 1950$$

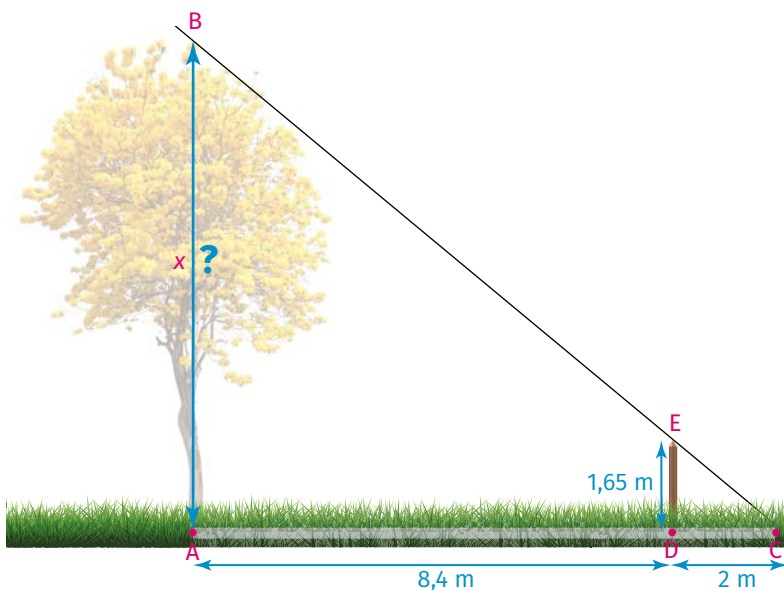
$$y = \frac{1950}{150}$$

$$y = 13$$

14

Niek en Sofie willen graag de grote trompetboom in hun tuin verwijderen. Daarvoor moeten ze eerst weten hoe hoog de boom is. Op een zonnige dag zorgen de boom en de omheining van hun tuin voor een schaduwstrook (zie figuur). De afscheiding van de tuin is 1,65 m hoog. Bereken de hoogte van de boom. Toon eerst aan dat de driehoeken gelijkvormig zijn.

(Je mag aannemen dat de boom en de omheining loodrecht op de grond staan.)



Voor $\triangle ABC$ en $\triangle DEC$ geldt:

$$\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ \text{ (gegeven)}$$

$$\hat{C} = \hat{C}$$

$$\text{(gemeenschappelijke hoek)} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEC$$

$$\frac{|AC|}{|DC|} = \frac{x}{1,65}$$

$$\frac{8,4 + 2}{2} = \frac{x}{1,65}$$

$$\frac{10,4}{2} = \frac{x}{1,65}$$

$$10,4 \cdot 1,65 = 2x$$

$$17,16 = 2x$$

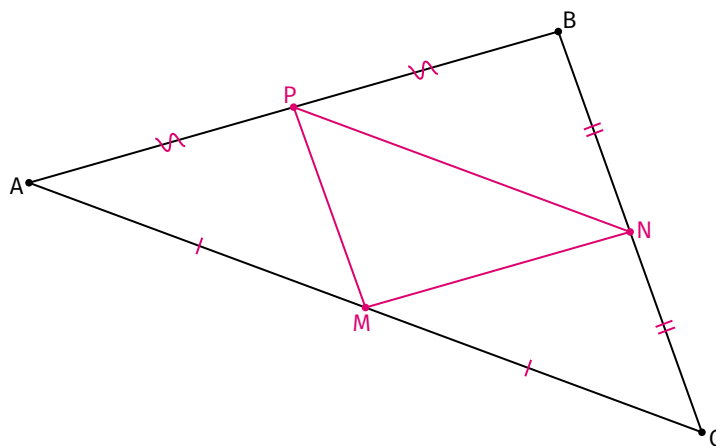
$$\frac{17,16}{2} = x$$

$$8,58 = x$$

Antwoord: De boom is 8,58 m hoog.

15

Teken alle middenparallelten in driehoek ABC.



16

Gegeven: $\triangle ABC$ met $|AB| = 8 \text{ cm}$, $|BC| = 4 \text{ cm}$ en $|AC| = 6 \text{ cm}$ a) M is het midden van $[AB]$ en N is het midden van $[BC]$. Hoe lang is $[MN]$?

$$|MN| = \frac{1}{2} |AC| = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

b) Hoe lang is de middenparallel die evenwijdig loopt met $[BC]$?

$$\frac{1}{2} |BC| = \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$$

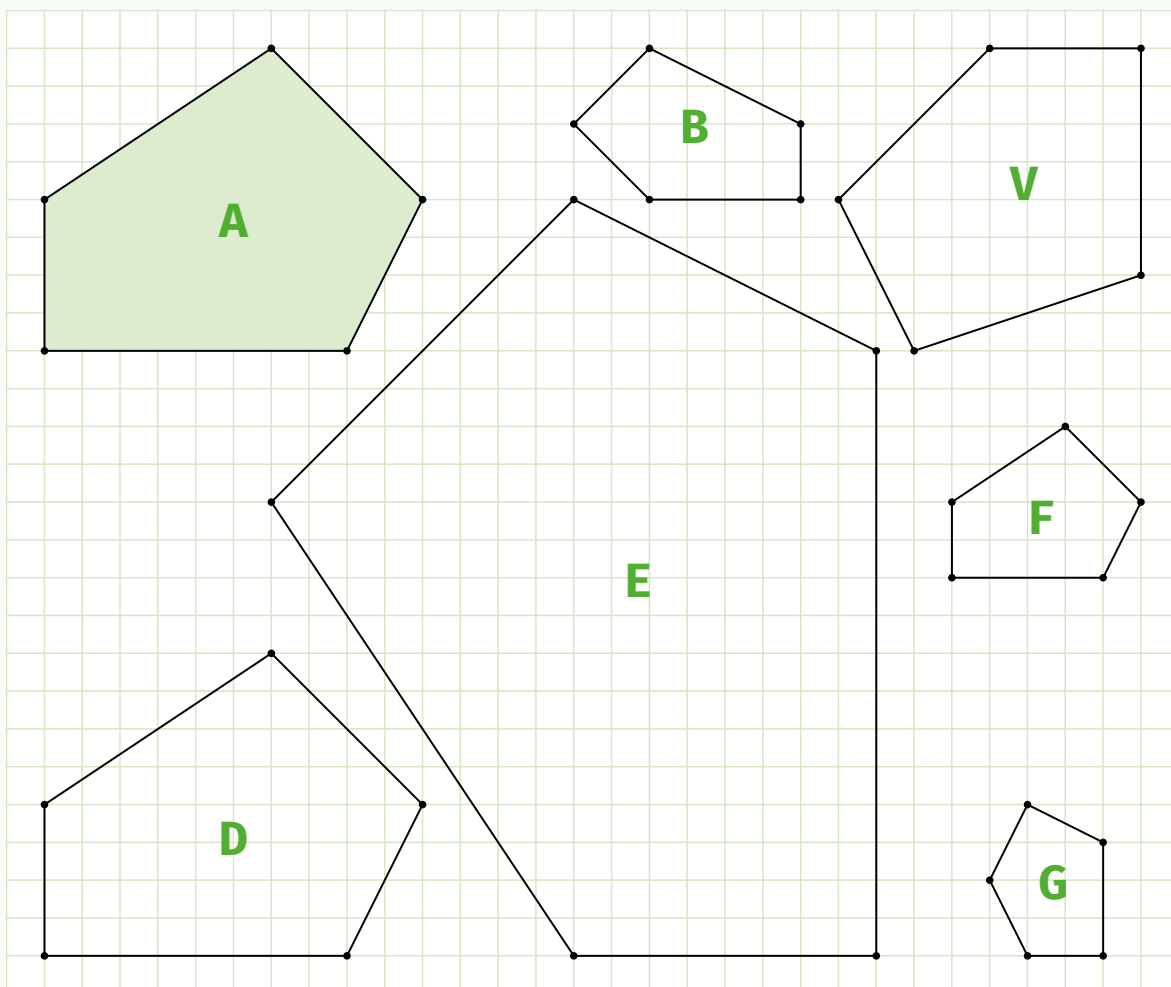


Signaal oefeningen

1

Welke figuren zijn gelijkvormig met figuur A?

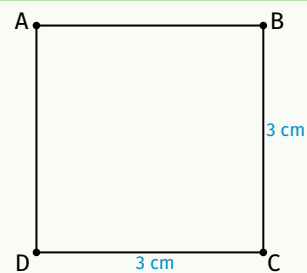
D, E en F



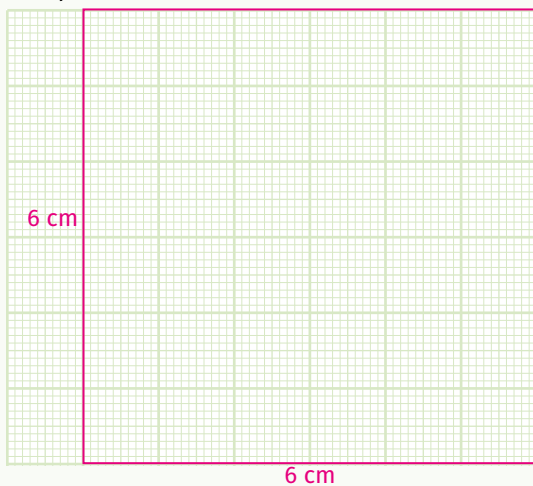
>>> Verder oefenen: D1 t.e.m. D19

2

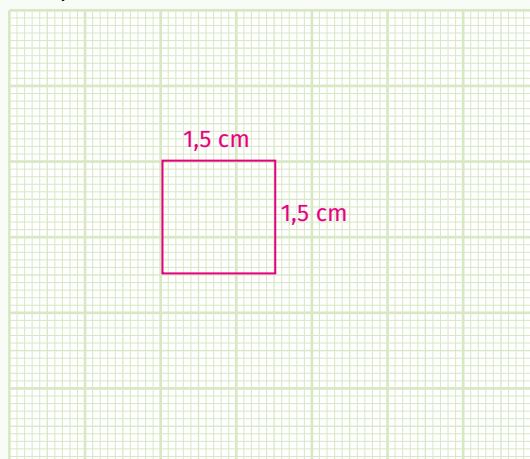
Teken dit vierkant ABCD ...



a) op schaal 2:1.



b) op schaal 1:2.

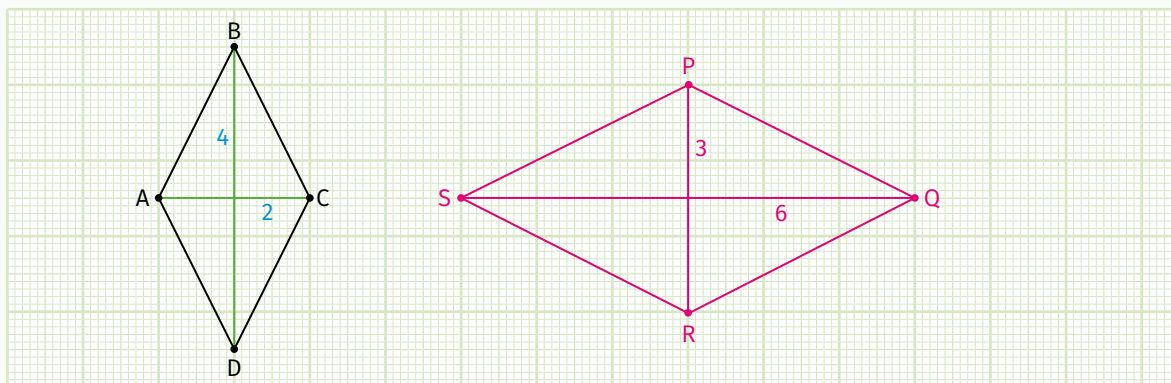


>>> Verder oefenen: D1 t.e.m. D19

3

- a) Teken een ruit PQRS die gelijkvormig is met de gegeven ruit ABCD.
De gelijkvormigheidsfactor is 1,5.

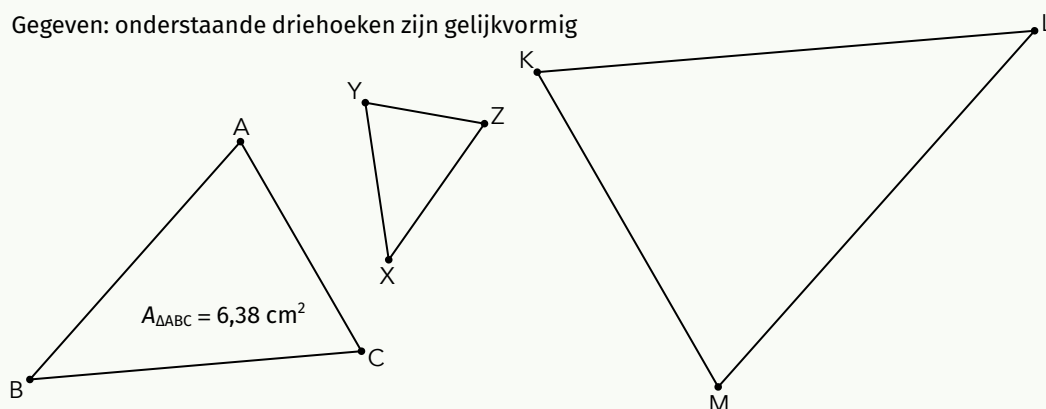
- b) Noteer in symbolen: de ruit ABCD is gelijkvormig met de ruit PQRS. $ABCD \sim PQRS$



>>> Verder oefenen: D1 t.e.m. D19

4

Gegeven: onderstaande driehoeken zijn gelijkvormig



- a) Noteer in symbolen dat de drie driehoeken gelijkvormig zijn.

$$\triangle BAC \sim \triangle XYZ \sim \triangle LMK$$

- b) Bepaal de gelijkvormigheidsfactor van $\triangle XYZ$ ten opzichte van $\triangle ABC$.

$$\frac{|XY|}{|BA|} = \frac{|YZ|}{|AC|} = \frac{|XZ|}{|BC|} = 0,5$$

- c) Bepaal de gelijkvormigheidsfactor van $\triangle KLM$ ten opzichte van $\triangle ABC$.

$$\frac{|KL|}{|CB|} = \frac{|LM|}{|BA|} = \frac{|KM|}{|CA|} = 1,5$$

- d) Bepaal de oppervlakte van $\triangle XYZ$ zonder te meten. Rond af op 0,01 cm² nauwkeurig.

$$\begin{aligned} A_{\triangle XYZ} &= k^2 \cdot 6,38 \text{ cm}^2 \\ &= 0,5^2 \cdot 6,38 \text{ cm}^2 \\ &\approx 1,60 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

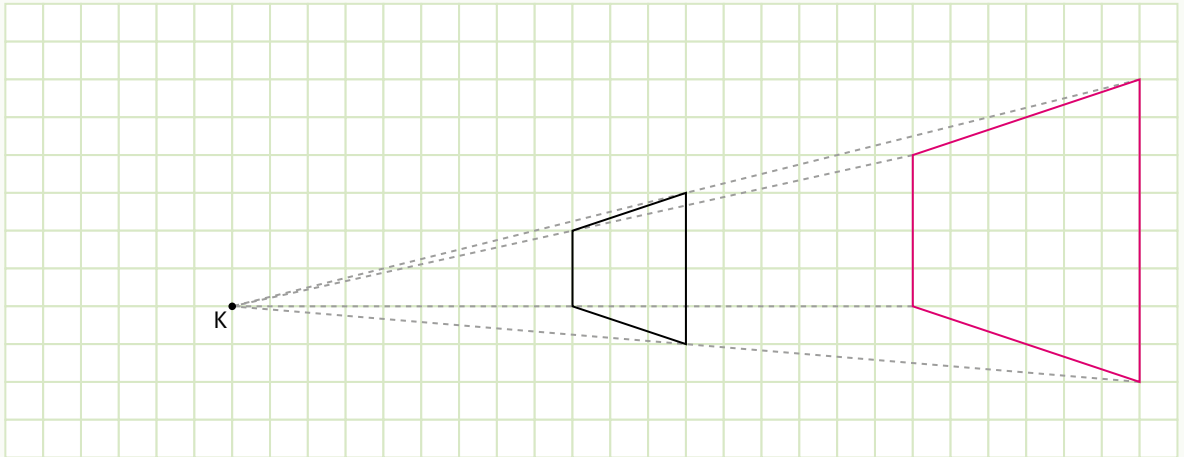
- e) Bepaal de oppervlakte van $\triangle KLM$ zonder te meten. Rond af op 0,01 cm² nauwkeurig.

$$\begin{aligned} A_{\triangle KLM} &= k^2 \cdot 6,38 \text{ cm}^2 \\ &= 1,5^2 \cdot 6,38 \text{ cm}^2 \\ &\approx 14,36 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

>>> Verder oefenen: D1 t.e.m. D19

5

a) Bepaal grafisch het beeld door de homothetie met centrum K en factor 2.



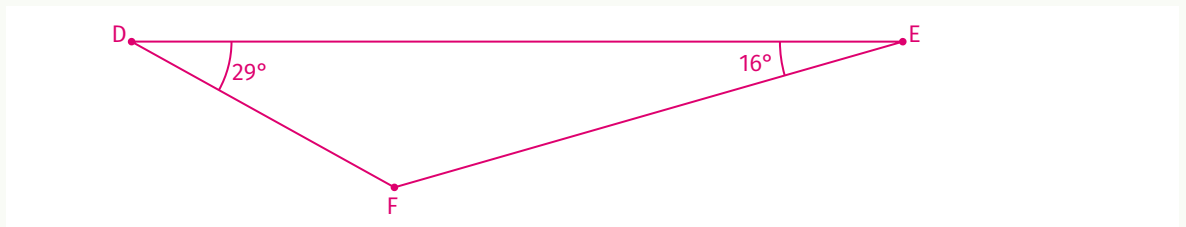
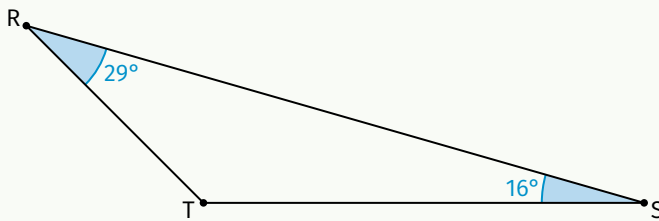
b) Welk besluit kun je trekken in verband met de oppervlakte van de originele figuur en zijn beeld?

De oppervlakte van het beeld is 2^2 of 4 keer zo groot.

>>> Verder oefenen: D20 t.e.m. D26

6

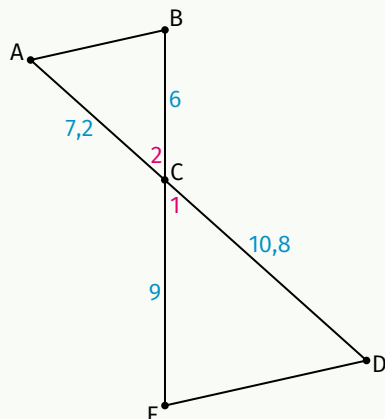
Teken een driehoek DEF die gelijkvormig, maar niet congruent is met driehoek RST, door gebruik te maken van het gelijkvormigheidskenmerk HH.



>>> Verder oefenen: D27 t.e.m. D37

7

Bewijs dat $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.



In $\triangle ABC$ en $\triangle DEC$ geldt:

$$\frac{|CD|}{|CA|} = \frac{|CE|}{|CB|} = 1,5 \quad (\text{gegeven})$$

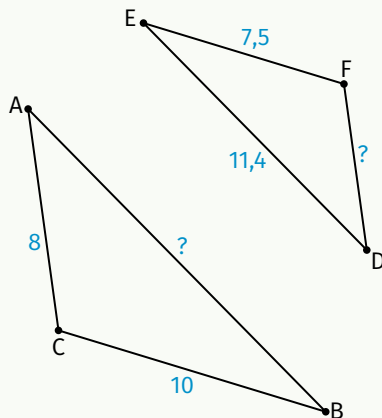
$$\hat{C}_1 = \hat{C}_2$$

(overstaande hoeken)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{|CD|}{|CA|} = \frac{|CE|}{|CB|} \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Z.H.Z.} \\ \text{Z.Z.} \end{array} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEC$$

>>> Verder oefenen: D27 t.e.m. D37

8

Gegeven: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ Bepaal: $|AB|$ en $|DF|$ 

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$$

$$\frac{|AB|}{11,4} = \frac{8}{|DF|} = \frac{10}{7,5}$$

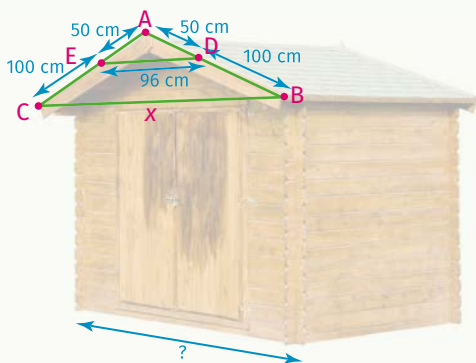
$$|AB| = \frac{10 \cdot 11,4}{7,5} = 15,2$$

$$|DF| = \frac{8 \cdot 7,5}{10} = 6$$

>>> Verder oefenen: D38 t.e.m. D66

9

Bepaal de breedte van het tuinhuis.

In $\triangle ABC$ en $\triangle ADE$ geldt:

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} \quad (\text{gegeven})$$

$$\hat{A} = \hat{A} \quad (\text{gemeenschappelijke hoek})$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} \\ \hat{A} = \hat{A} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Z.H.} \\ \text{Z.Z.} \\ \text{Z.Z.} \end{array} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$$

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{x}{|DE|}$$

$$\frac{100 + 50}{50} = \frac{x}{96}$$

$$\frac{150}{50} = \frac{x}{96}$$

$$3 = \frac{x}{96}$$

$$3 \cdot 96 = x$$

$$288 = x$$

Antwoord: Het tuinhuis is 288 cm breed.

>>> Verder oefenen: D38 t.e.m. D66

10

Bereken $|BC|$ en $|DE|$.

$$|BC| = 2 \cdot |DF| \quad (\text{eigenschap middenparallel})$$

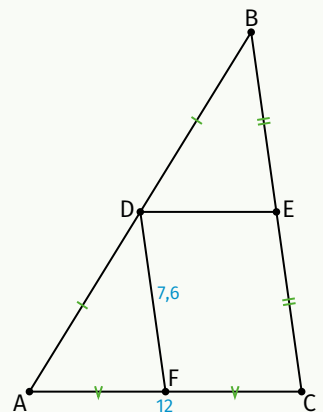
$$= 2 \cdot 7,6$$

$$= 15,2$$

$$|DE| = \frac{1}{2} |AC| \quad (\text{eigenschap middenparallel})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 12$$

$$= 6$$



>>> Verder oefenen: D38 t.e.m. D66

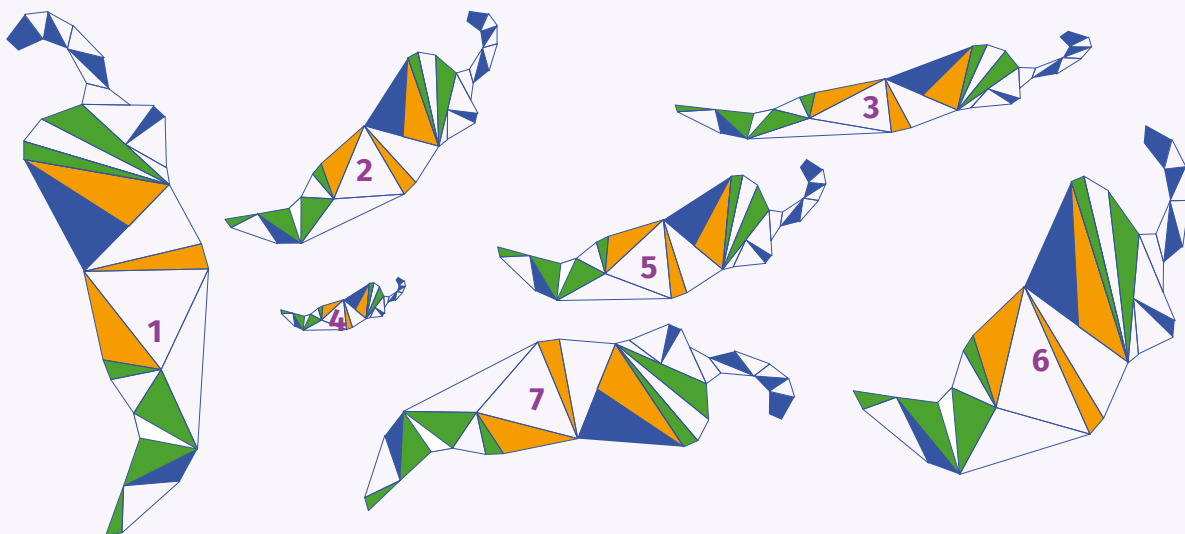


Differentiatietraject

module p. 29

1

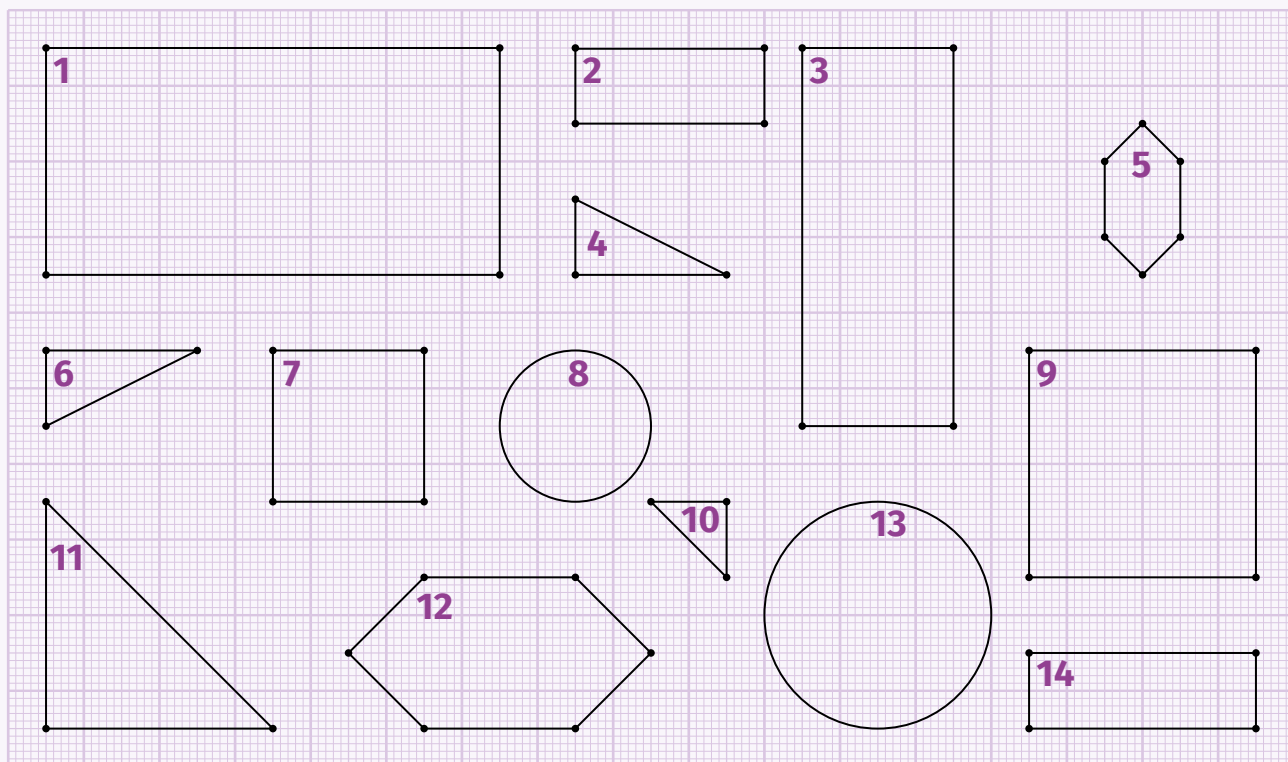
Hieronder vind je zeven keer het logo van Nando. Welke logo's zijn gelijkvormig met elkaar?



De logo's 1, 2, 4, 5 en 7 zijn gelijkvormig.

2

Welke figuren zijn gelijkvormig?



De volgende figuren zijn onderling gelijkvormig:

- 2 en 3
- 4 en 6
- 5 en 12
- 7 en 9
- 8 en 13
- 10 en 11

3

Je ziet telkens een schaduw op de muur.

- Noteer voor elke figuur of de schaduw van de handen groter, kleiner of gelijk is aan de "grootte" van de handen.
- Verklaar waarom dit kan verschillen.



figuur 1



figuur 3



figuur 5



figuur 2



figuur 4



figuur 6

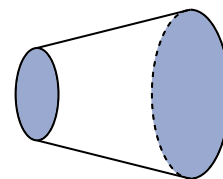
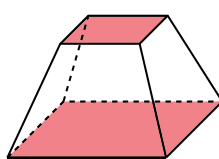
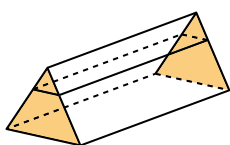
- figuur 1: gelijk
- figuur 2: groter
- figuur 3: groter
- figuur 4: kleiner
- figuur 5: kleiner
- figuur 6: gelijk

- De grootte van de schaduw hangt af van de grootte van de lichtbron en de afstand tussen het scherm, het voorwerp en de lichtbron.

4

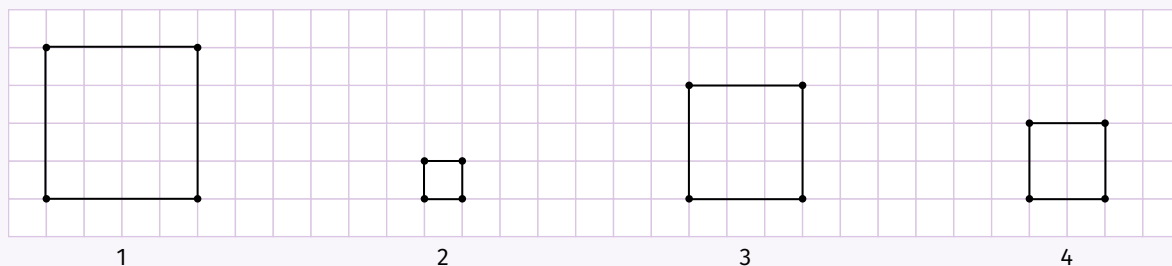
Kleur in elke ruimtefiguur twee vlakke figuren die gelijkvormig zijn.

bv.



5

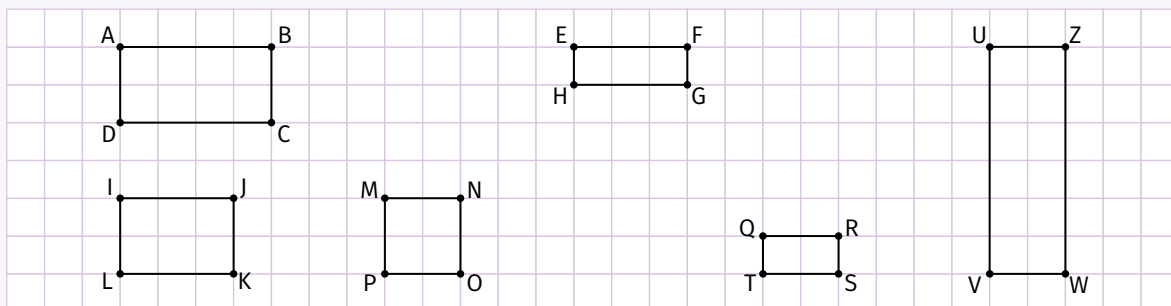
Welke figuren zijn gelijkvormig met elkaar?



De figuren 1, 2, 3 en 4 zijn gelijkvormig (alle vierkanten zijn gelijkvormig).

6

Noteer in symbolen welke rechthoeken gelijkvormig zijn met elkaar.



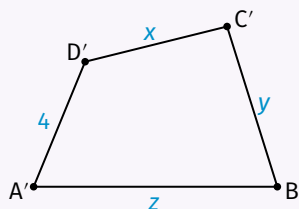
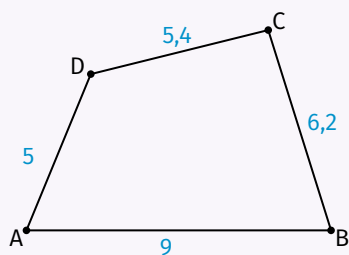
$$ABCD \sim QRST$$

$$EFGH \sim VUZW$$

7

Vierhoek ABCD is gelijkvormig met A'B'C'D'.

- Bepaal de gelijkvormigheidsfactor.
- Bereken de ontbrekende lengten x, y en z.



$$a) \frac{|A'D'|}{|AD|} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$b) \frac{|D'C'|}{|DC|} = 0,8$$

$$\frac{x}{5,4} = 0,8$$

$$x = 0,8 \cdot 5,4$$

$$x = 4,32$$

$$\frac{|B'C'|}{|BC|} = 0,8$$

$$\frac{y}{6,2} = 0,8$$

$$y = 0,8 \cdot 6,2$$

$$y = 4,96$$

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = 0,8$$

$$\frac{z}{9} = 0,8$$

$$z = 0,8 \cdot 9$$

$$z = 7,2$$

8

a) Noteer in symbolen: de driehoek JKL is gelijkvormig met de driehoek MNO.

b) Gegeven: $\Delta FAM \sim \Delta ERT$

- Noteer de overeenkomstige zijden.
- Noteer de overeenkomstige hoeken.
- Noteer de gelijkvormigheidsfactor k van ΔERT ten opzichte van ΔFAM .

a) $\Delta JKL \sim \Delta MNO$

b) - De overeenkomstige zijden zijn: [FA] en [ER], [AM] en [RT], [FM] en [ET].

- De overeenkomstige hoeken zijn: $\hat{F}$ en $\hat{E}$, $\hat{A}$ en $\hat{R}$, $\hat{M}$ en $\hat{T}$.

- De gelijkvormigheidsfactor van ΔERT ten opzichte van ΔFAM is

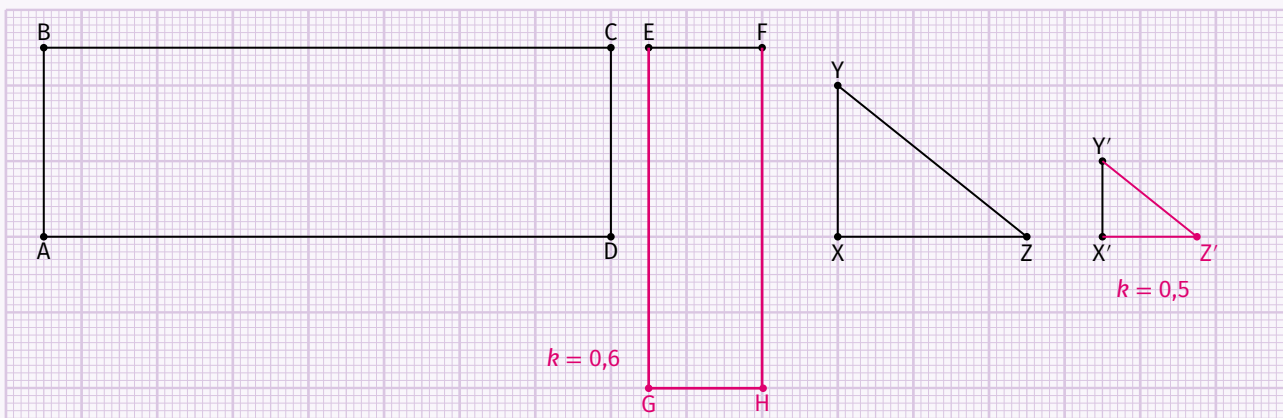
$$\frac{|ER|}{|FA|} = \frac{|RT|}{|AM|} = \frac{|ET|}{|FM|} = k$$

9

Teken een gelijkvormige figuur. Vermeld ook de gebruikte gelijkvormigheidsfactor.

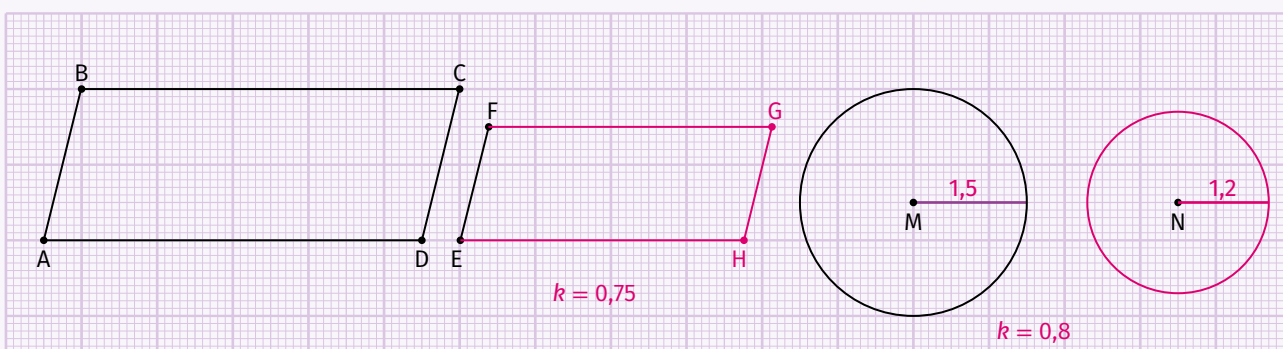
a) $ABCD \sim EFGH$

c) $\triangle XYZ \sim \triangle X'Y'Z'$



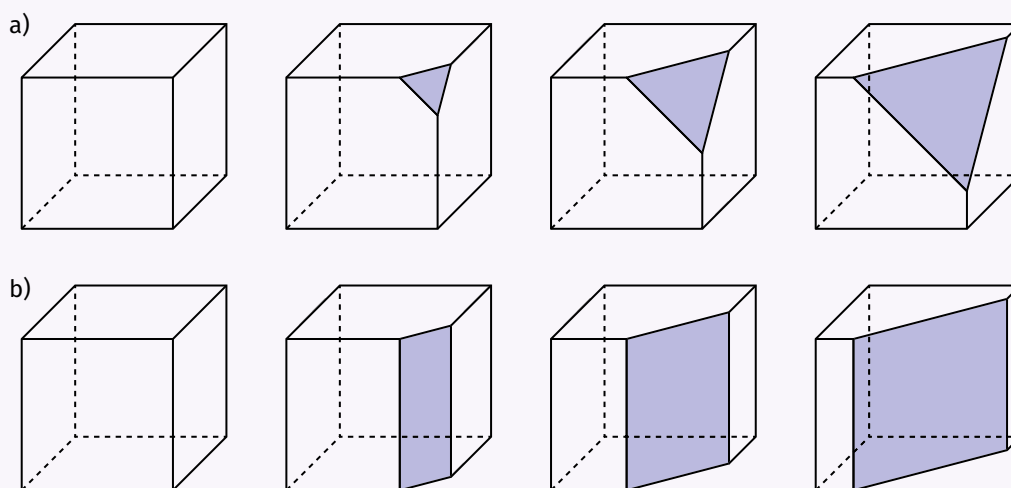
b) $ABCD \sim EFGH$

d) $C(M, r_1) \sim C(N, r_2)$



10

Van een kubus wordt er telkens een even dik stuk afgezaagd. Je verkrijgt volgende zaagvlakken. Zijn de zaagvlakken gelijkvormig? Verklaar je antwoord.



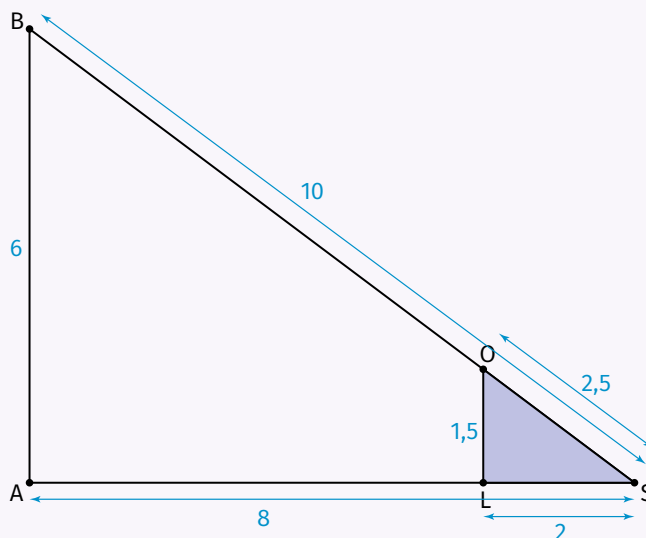
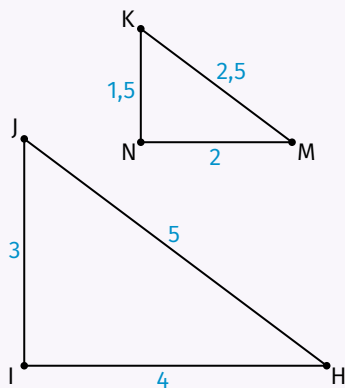
- a) De stukken worden telkens zo van de kubus gezaagd, dat het zaagvlak steeds een gelijkzijdige driehoek is. Alle gelijkzijdige driehoeken zijn gelijkvormig volgens het kenmerk HH (aangezien alle hoeken in elke gelijkzijdige driehoek 60° zijn).
- b) De zaagvlakken zijn telkens rechthoeken waarvan 1 paar zijden altijd even groot is, en het ander paar zijden groter wordt. De verhouding van de lengtes van de overeenkomstige zijden is hierdoor telkens verschillend. De zaagvlakken zijn dus niet gelijkvormig.



11

Onderstaande driehoeken zijn gelijkvormig.

- Noteer de gelijkvormige driehoeken in symbolen.
- Bepaal de gelijkvormigheidsfactor van elke driehoek t.o.v. $\triangle LOS$.



a) $\triangle ABS \sim \triangle LOS \sim \triangle IJH \sim \triangle NKM$

b) De gelijkvormigheidsfactor van $\triangle NKM$ t.o.v. $\triangle LOS$ is $\frac{|NK|}{|LO|} = \frac{|KM|}{|OS|} = \frac{|NM|}{|LS|} = 1$

$\triangle IJH$ t.o.v. $\triangle LOS$ is $\frac{|IJ|}{|LO|} = \frac{|JH|}{|OS|} = \frac{|IH|}{|LS|} = 2$

$\triangle ABS$ t.o.v. $\triangle LOS$ is $\frac{|AB|}{|LO|} = \frac{|BS|}{|OS|} = \frac{|AS|}{|LS|} = 4$



12

- a) Twee parallellogrammen zijn gelijkvormig met gelijkvormigheidsfactor 3. De oppervlakte van het kleinste parallellogram is 10 cm^2 . Bepaal de oppervlakte van het grootste parallellogram.
- b) Twee driehoeken zijn gelijkvormig. De oppervlakte van de grootste driehoek is 24 cm^2 en van de kleinste driehoek 6 cm^2 . Bepaal de gelijkvormigheidsfactor van de kleinste driehoek ten opzichte van de grootste driehoek.
- c) Een eerste kubus heeft een ribbe van 4 cm en een tweede kubus is gelijkvormig met gelijkvormigheidsfactor 0,5. Bepaal het volume van de tweede kubus.

$$\text{a) } A_1 = b \cdot h$$

$$A_2 = 3b \cdot 3h$$

$$= 9b \cdot h$$

$$= 9 \cdot A_1$$

$$= 9 \cdot 10 \text{ cm}^2$$

$$= 90 \text{ cm}^2$$

$$\text{b) } A_1 = \frac{b \cdot h}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = k^2 \cdot A_1 = 6 \text{ cm}^2$$

$$k^2 = \frac{6 \text{ cm}^2}{A_1} = \frac{6 \text{ cm}^2}{24 \text{ cm}^2} = 0,25$$

$$k = \sqrt{0,25} = 0,5$$

$$\text{c) } z_1 = 4 \text{ cm}$$

$$z_2 = 0,5 \cdot 4 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$$

$$V_2 = z_2^3 = (2 \text{ cm})^3 = 8 \text{ cm}^3$$



13

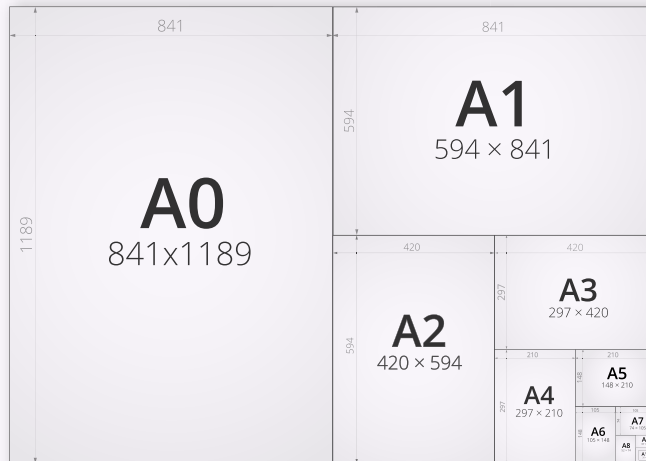
De ribben van een kubus worden verdubbeld.

- a) Wat gebeurt er met de totale oppervlakte van de kubussen?
- b) Hoe verhouden de inhouden zich?

a) De oppervlakte wordt 4 keer groter (nl. het kwadraat van 2).

b) De inhouden verhouden zich als $\frac{1}{8}$ (nl. de 3e macht van $\frac{1}{2}$).





- Toon aan dat A4-papier en A3-papier gelijkvormig zijn door de gelijkvormigheidsfactor (A3 t.o.v. A4) te benaderen.
- Vergelijk jouw gelijkvormigheidsfactor met de decimale vorm van $\sqrt{2}$. Wat stel je vast?
- Hoeveel keer kan een A4-papier in een A3-papier?
- Hoeveel keer kan een A4-papier in een A2-papier?
- Bepaal de gelijkvormigheidsfactor van A2-papier ten opzichte van A4-papier.
- Vervolledig de zin: als het papierformaat met de gelijkvormigheidsfactor ... vergroot werd, dan neemt de oppervlakte met ... toe.
- Druk het verband tussen de gelijkvormigheidsfactor en de toename (afname) van de oppervlakte uit met een formule.

$$\text{a) } \frac{420}{297} \approx 1,414$$

$$\frac{297}{210} \approx 1,414$$

De verhouding van de lengtes van de zijden is ongeveer even groot.

$$\text{b) } \sqrt{2} \approx 1,414$$

De gelijkvormigheidsfactor is ongeveer even groot als de decimale vorm van $\sqrt{2}$.

c) Twee keer

d) Vier keer

$$\text{e) } \frac{594}{297} = \frac{420}{210} = 2$$

f) Als het papierformaat met de gelijkvormigheidsfactor k vergroot werd, dan neemt de oppervlakte met k^2 toe.

$$\text{g) } A_1 = l \cdot b$$

$$A_2 = kl \cdot kb \quad (\text{waarbij } k \text{ de gelijkvormigheidsfactor is})$$

$$A_2 = k^2 \cdot l \cdot b$$

$$A_2 = k^2 \cdot A_1$$



15

- a) De oppervlakte van een eerste cirkel is $40\pi \text{ cm}^2$ en een tweede cirkel $3,6\pi \text{ cm}^2$. Bepaal de gelijkvormigheidsfactor van de tweede cirkel ten opzichte van de eerste cirkel.
- b) Het volume van een eerste piramide is 45 cm^3 en van een tweede piramide 1215 cm^3 . Bepaal de gelijkvormigheidsfactor.

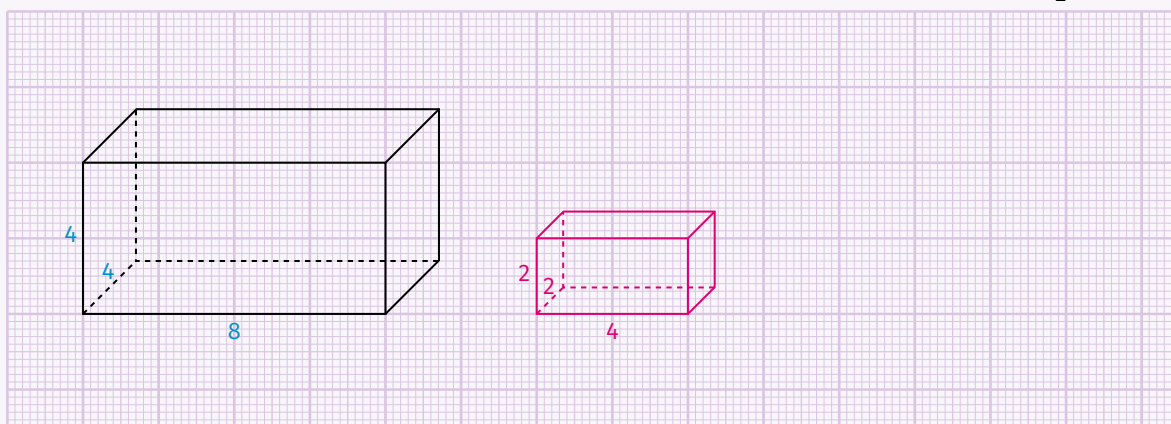
$$\begin{aligned} \text{a)} \quad A_1 &= 40\pi \text{ cm}^2 \\ A_2 &= k^2 \cdot A_1 \\ 3,6\pi \text{ cm}^2 &= k^2 \cdot 40\pi \text{ cm}^2 \\ k^2 &= \frac{3,6\pi \text{ cm}^2}{40\pi \text{ cm}^2} \\ k^2 &= 0,09 \\ k &= \sqrt{0,09} = 0,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad V_1 &= 45 \text{ cm}^3 \\ V_2 &= k^3 \cdot V_1 = 1215 \text{ cm}^3 \\ k^3 &= \frac{1215 \text{ cm}^3}{45 \text{ cm}^3} = 27 \\ k &= \sqrt[3]{27} = 3 \end{aligned}$$



16

Teken een balk die gelijkvormig is met de gegeven balk als je weet dat de gelijkvormigheidsfactor $\frac{1}{2}$ is.



17

Als ΔXYZ gelijkvormig is met ΔABC (gelijkvormigheidsfactor k) en ΔABC is gelijkvormig met ΔDEF (met gelijkvormigheidsfactor k'), dan is ΔXYZ ook gelijkvormig met ΔDEF .
Is deze uitspraak WAAR (geef dan de gelijkvormigheidsfactor) of NIET WAAR (verklaar)?

Waar, de gelijkvormigheidsfactor is $k \cdot k'$.



18

Twee balken zijn gelijkvormig. De hoogte van de eerste balk is 10 cm en de hoogte van de tweede balk is 15 cm. Hoe verhouden de volumes van deze balken zich?

$$\begin{aligned} h_1 &= 10 \text{ cm} \\ h_2 &= 15 \text{ cm} \\ \Rightarrow k &= \frac{h_2}{h_1} = \frac{15 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 1,5 \\ V_1 &= lbh \\ V_2 &= kl \cdot kb \cdot kh \\ &= 1,5l \cdot 1,5b \cdot 1,5h \\ &= 1,5^3 \cdot lbh \\ &= 1,5^3 \cdot V_1 \end{aligned}$$

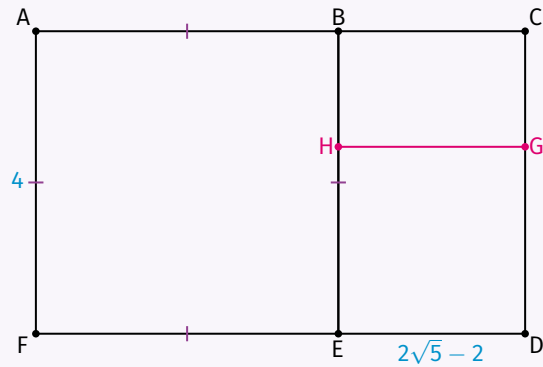
Antwoord: Het volume van de tweede balk is $1,5^3$ of 3,375 keer groter dan de eerste balk.



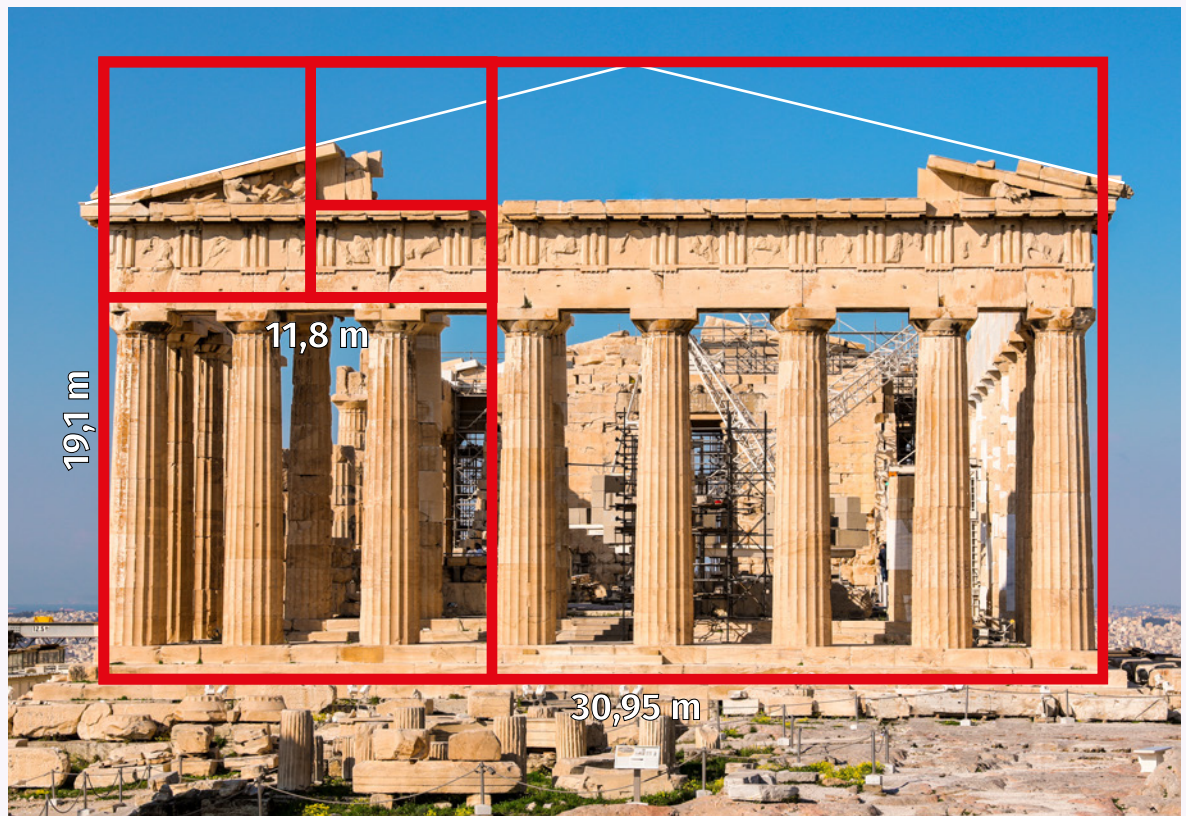
19

Gegeven: Een gulden rechthoek is een rechthoek waarvan de verhouding van de lengte op de breedte gelijk

is aan $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.



- Controleer of ACDF een gulden rechthoek is.
- Toon aan dat de rechthoek ACDF gelijkvormig is met de rechthoek CDEB.
- Teken in de kleine rechthoek CDEB een rechthoek BCGH die gelijkvormig is met CDEB.
- Ga na of de Grieken bij de bouw van het Parthenon op de Akropolis gebruik hebben gemaakt van de gulden rechthoek.



$$a) \frac{|FD|}{|AF|} = \frac{|EF| + |ED|}{|AF|} = \frac{4 + 2\sqrt{5} - 2}{4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Antwoord: De verhouding van de lengte op de breedte is gelijk aan $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.
ACDF is een gulden rechthoek.

$$b) \text{ Te bewijzen: } \frac{|ED|}{|AF|} = \frac{|CD|}{|CA|}$$

$$\frac{|ED|}{|AF|} = \frac{2\sqrt{5} - 2}{4} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\frac{|CD|}{|CA|} = \frac{4}{4 + 2\sqrt{5} - 2} = \frac{4}{2\sqrt{5} + 2} \cdot \frac{2\sqrt{5} - 2}{2\sqrt{5} - 2} = \frac{8\sqrt{5} - 8}{4 \cdot 5 - 4} = \frac{8\sqrt{5} - 8}{16} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

c) Zie figuur

$$d) \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,62$$

$$\frac{30,95 \text{ m}}{19,1 \text{ m}} \approx 1,62$$

$$\frac{19,1 \text{ m}}{11,8 \text{ m}} \approx 1,62$$

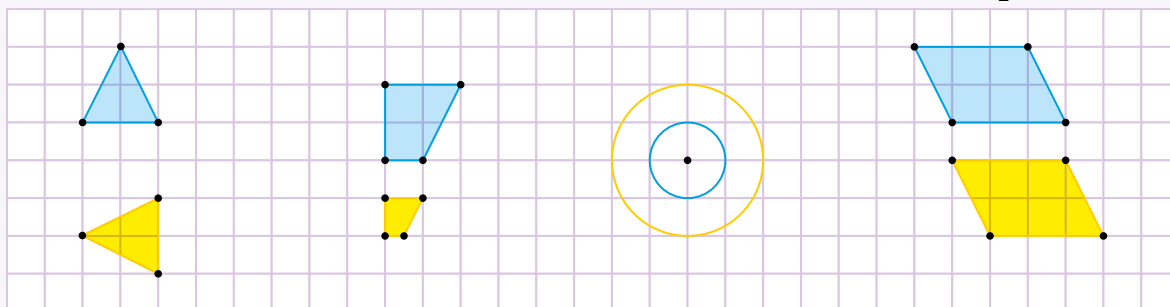
Antwoord: Het Parthenon is gebouwd volgens de gulden rechthoek.



20

De gele figuur is het beeld van de blauwe figuur door een transformatie.
Plaats de juiste transformatie(s) bij de juiste tekening.

- | | |
|--|---|
| a) een spiegeling om een as | e) een homothetie met factor 2 |
| b) een spiegeling om een punt | f) een homothetie met factor $\frac{1}{2}$ |
| c) een verschuiving volgens een vector | g) een homothetie met factor -2 |
| d) een rotatie | h) een homothetie met factor $-\frac{1}{2}$ |



rotatie

homothetie met factor $\frac{1}{2}$

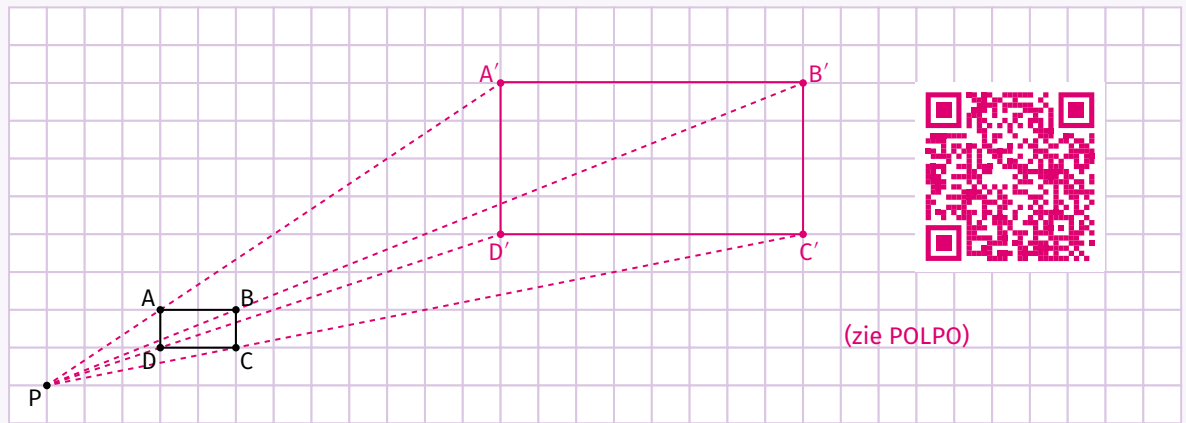
homothetie
met factor 2
of
homothetie
met factor -2

spiegeling om
een punt
of
verschuiving volgens
een vector



21

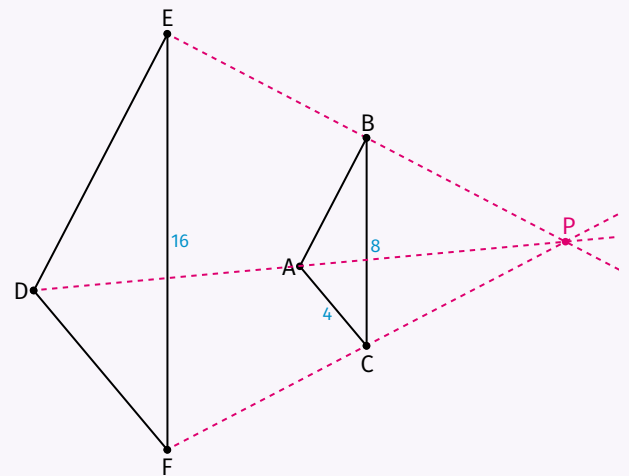
Bepaal met ICT het beeld van rechthoek ABCD door een homothetie met centrum P en factor 4.



22

 $\triangle DEF$ is het beeld van $\triangle ABC$ door een homothetie.

- Bepaal de factor van deze homothetie.
- Bepaal het centrum van deze homothetie.
- Bereken de lengte van $|DF|$.



$$a) \frac{|FE|}{|BC|} = \frac{16}{8} = 2$$

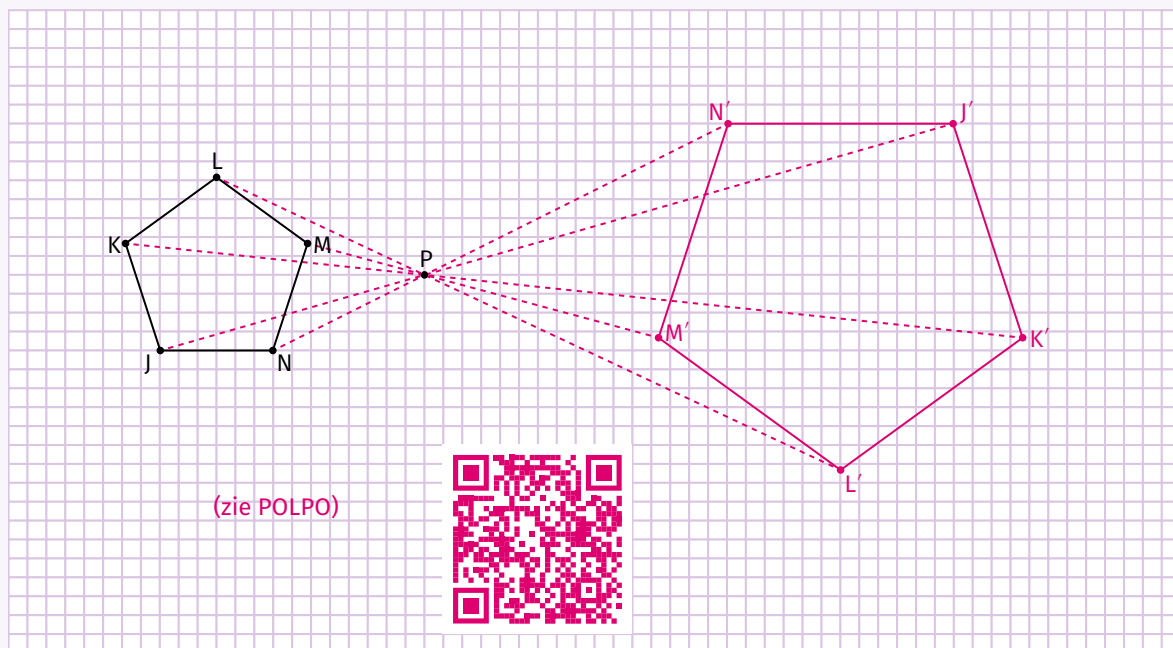
$$c) \begin{aligned} |DF| &= 2 \cdot |AC| \\ |DF| &= 2 \cdot 4 \\ |DF| &= 8 \end{aligned}$$



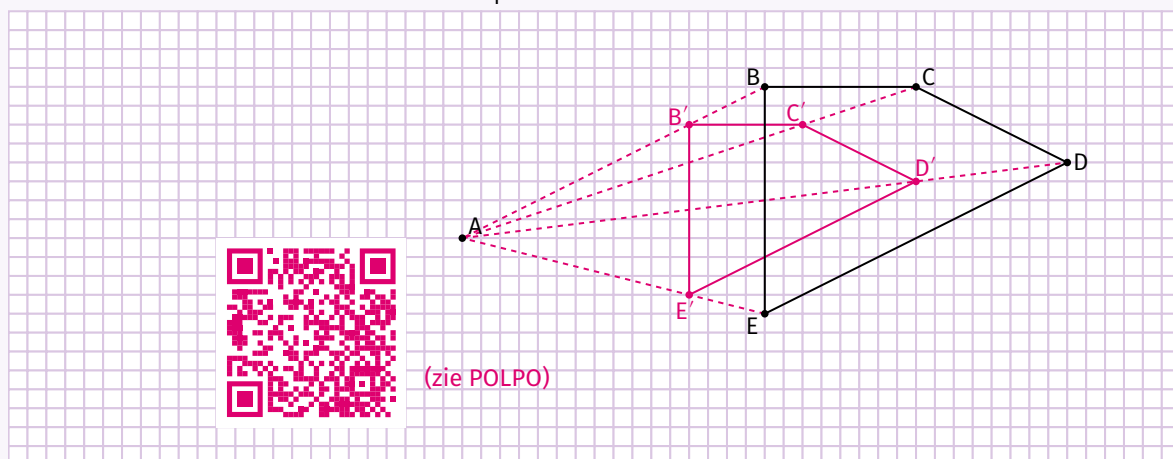


Construeer met ICT het beeld door de gegeven homothetie.

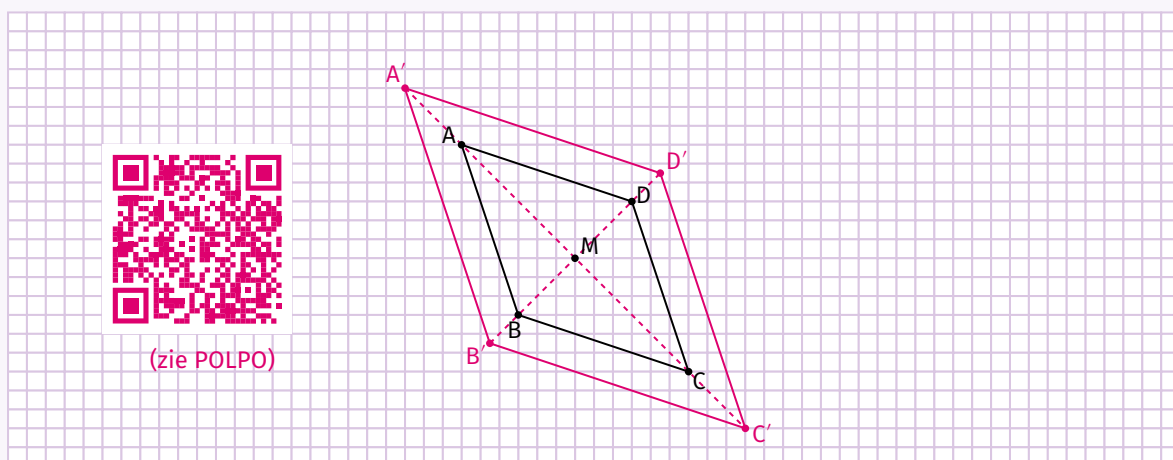
a) Een homothetie met centrum P en factor -2 .



b) Een homothetie met centrum A en factor $\frac{3}{4}$.



c) Een homothetie met centrum M en factor $\frac{3}{2}$.



24

Het beeld van een vierkant door een homothetie heeft een oppervlakte van 256 cm^2 . Het oorspronkelijk vierkant heeft een omtrek van 32 cm . Bepaal de factor van deze homothetie.

De oppervlakte van het beeld van een vierkant is 256 cm^2

$$\Rightarrow z'^2 = 256 \Rightarrow z' = \sqrt{256} = 16$$

$$z' = |k| \cdot z$$

$$16 = |k| \cdot 8$$

$$|k| = \frac{16}{8} = 2$$

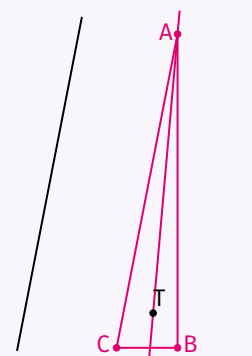
$$k = 2 \text{ of } k = -2$$

Antwoord: De factor van de homothetie is 2 of -2 .



25

Twee rechten, zoals hiernaast getekend, snijden elkaar in het punt P.
Teken de rechte PT.
Verklaar je antwoord.



De binnenste driehoek is het beeld van de buitenste driehoek (die niet helemaal zichtbaar is) door homothetie met centrum T. Het punt A is het beeld van het punt P. Bijgevolg is de rechte PT gelijk aan de getekende rechte TA.



26

Waar of niet waar?

- Elke isometrie is een homothetie.
- Een homothetie met factor 1 is een isometrie.
- Een transformatie die een figuur afbeeldt op een congruente figuur is een isometrie.
- Als je in het vlak het beeld van een homothetie spiegelt ten opzichte van een rechte, dan kun je het nieuwe beeld ook verkrijgen door een homothetie met een tegengestelde factor.

a) niet waar

b) waar

c) waar

d) niet waar



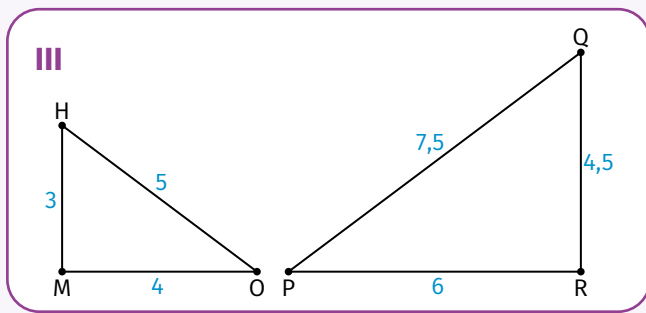
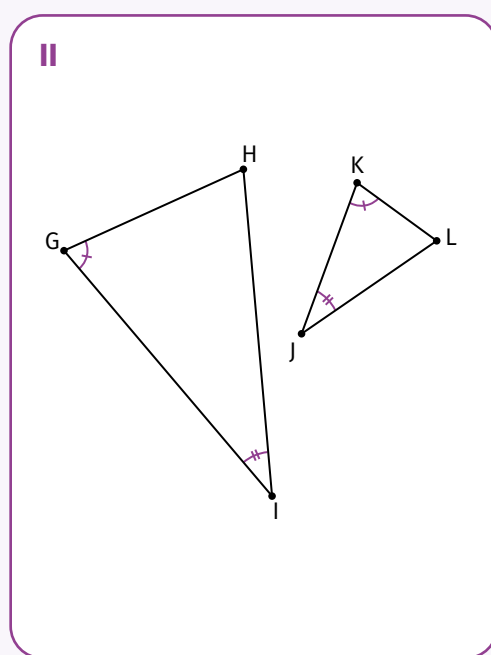
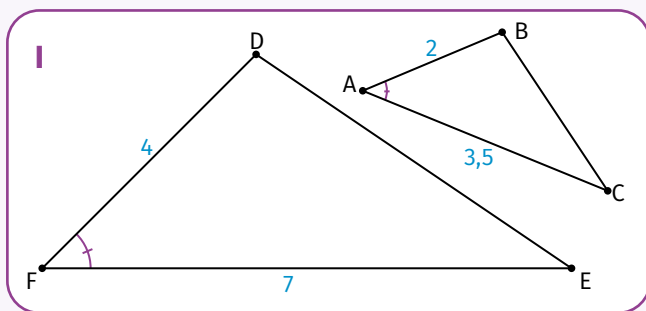
27

Plaats het gelijkvormigheidskenmerk bij de juiste tekening.

HH

$\frac{Z}{Z} \frac{H}{H} \frac{Z}{Z}$

$\frac{Z}{Z} \frac{Z}{Z} \frac{Z}{Z}$



I: $\frac{Z}{Z} \frac{H}{H} \frac{Z}{Z}$

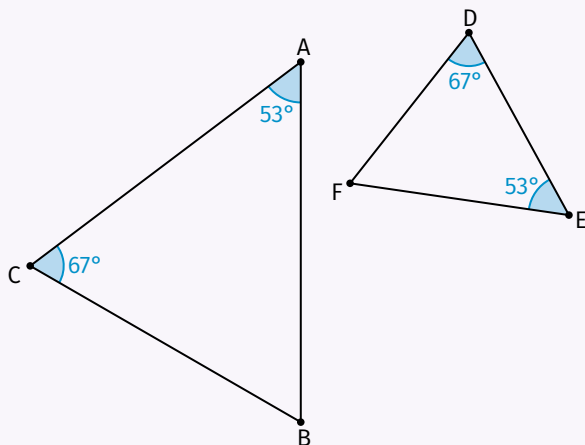
II: HH

III: $\frac{Z}{Z} \frac{Z}{Z} \frac{Z}{Z}$

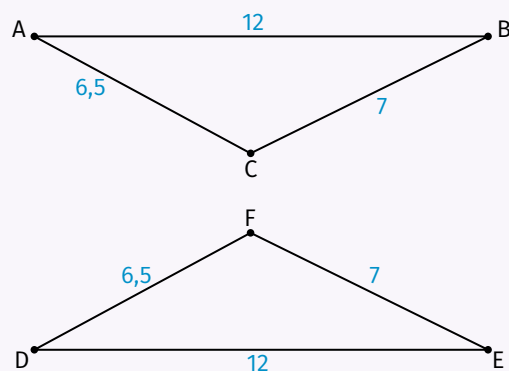
28

Welke driehoeken zijn gelijkvormig?
Verklaar met behulp van de gelijkvormigheidskenmerken.

a)



b)



a) $\triangle ABC \sim \triangle FED$ volgens het kenmerk HH, want $\hat{A} = \hat{E} = 53^\circ$ en $\hat{C} = \hat{D} = 67^\circ$.

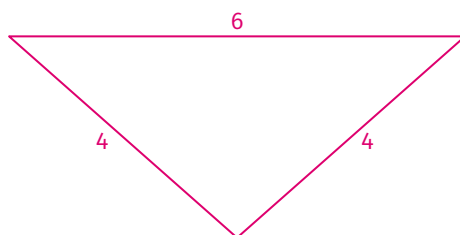
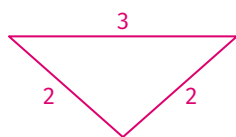
b) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ volgens het kenmerk $\frac{Z}{Z} \frac{Z}{Z} \frac{Z}{Z}$, want $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} = 1$

29

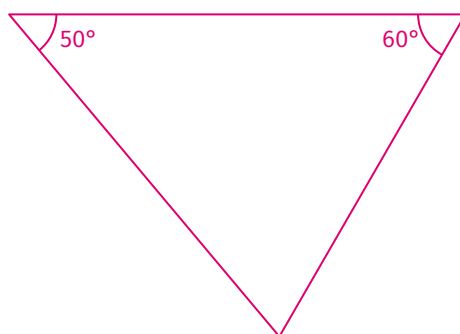
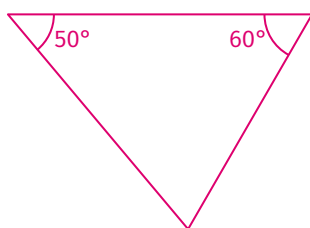
- a) Illustreer het gelijkvormigheidskenmerk $\frac{Z}{Z} \frac{Z}{Z} \frac{Z}{Z}$ met een tekening.
- b) Illustreer het gelijkvormigheidskenmerk HH met een tekening.
- c) Illustreer het gelijkvormigheidskenmerk $\frac{Z}{Z} H \frac{Z}{Z}$ met een tekening.

bv.

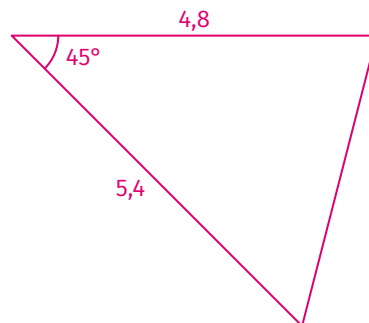
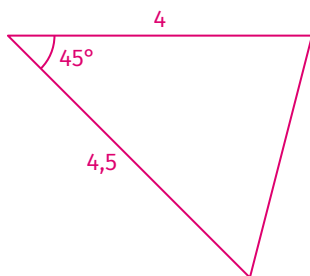
a)



b)



c)



30

Zijn $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ gelijkvormige driehoeken? Verklaar waarom wel of niet.

a)

$$\begin{aligned}\hat{A} &= 40^\circ \\ \hat{C} &= 75^\circ \\ \hat{D} &= 40^\circ \\ \hat{F} &= 75^\circ\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}|AB| &= 6 \\ |AC| &= 8 \\ |BC| &= 13 \\ |DE| &= 12 \\ |DF| &= 16 \\ |EF| &= 26\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}|AB| &= 4 \\ |AC| &= 5 \\ |DE| &= 8 \\ |DF| &= 10 \\ \hat{B} &= 34^\circ \\ \hat{C} &= 34^\circ\end{aligned}$$

a) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ volgens het kenmerk HH, want $\hat{A} = \hat{D} = 40^\circ$ en $\hat{C} = \hat{F} = 75^\circ$.

b) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ volgens het kenmerk $\frac{Z}{Z} \frac{Z}{Z} \frac{Z}{Z}$, want $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = 0,5$.

c) Het is onmogelijk om te bepalen of $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Om het kenmerk $\frac{Z}{Z} \frac{H}{Z} \frac{Z}{Z}$ te kunnen toepassen, moeten de ingesloten hoeken $\hat{A}$ en $\hat{D}$ gegeven zijn.

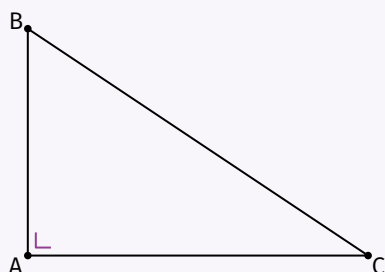


31

Teken telkens een gelijkvormige driehoek die niet congruent is, door gebruik te maken van het vermelde gelijkvormigheidskenmerk.

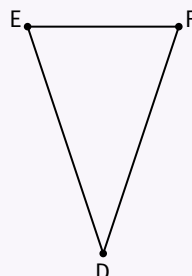
a)

HH



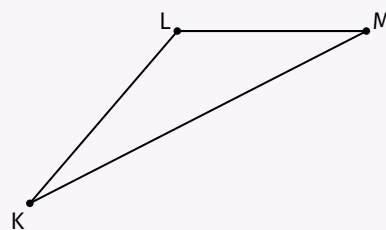
b)

$\frac{Z}{Z} \frac{H}{Z} \frac{Z}{Z}$

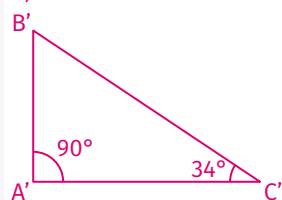


c)

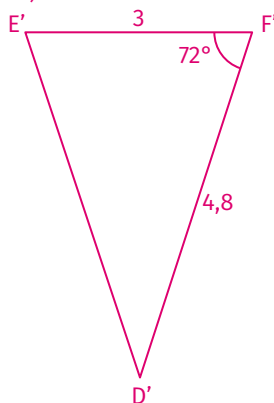
$\frac{Z}{Z} \frac{Z}{Z} \frac{Z}{Z}$



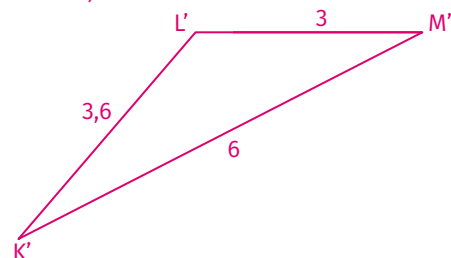
a)



b)



c)

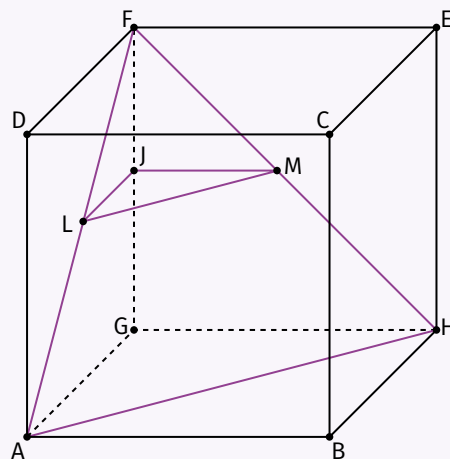


32

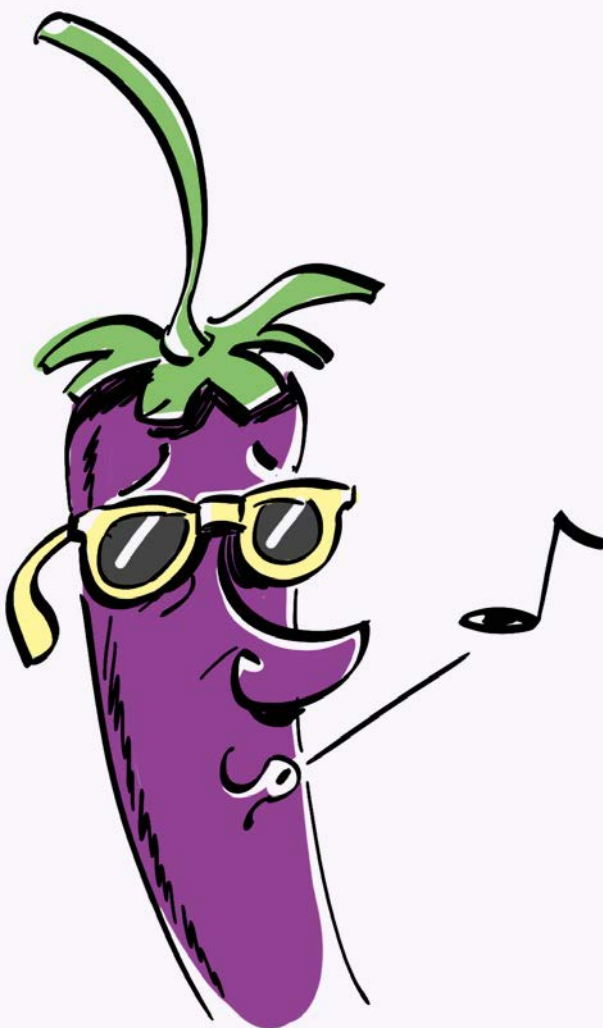
Gegeven: kubus $\begin{pmatrix} DCEF \\ ABHG \end{pmatrix}$ en $|FM| = |FL|$

Zijn de figuren gelijkvormig?

	FIGUUR 1	FIGUUR 2
a)	$\triangle AGH$	$\triangle LJM$
b)	$\triangle AGF$	$\triangle FEH$
c)	$\triangle AGJ$	$\triangle ABH$
d)	$\triangle AGFD$	$\triangle BCEH$



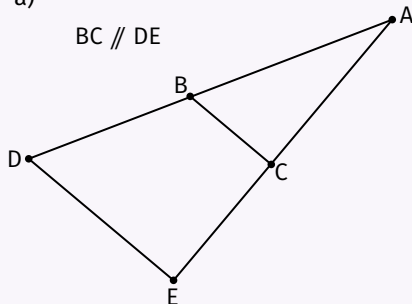
- a) ja, $\triangle AGH \sim \triangle LJM$
 b) ja, $\triangle AGF \sim \triangle FEH$
 c) neen
 d) ja, $\triangle AGFD \sim \triangle BCEH$



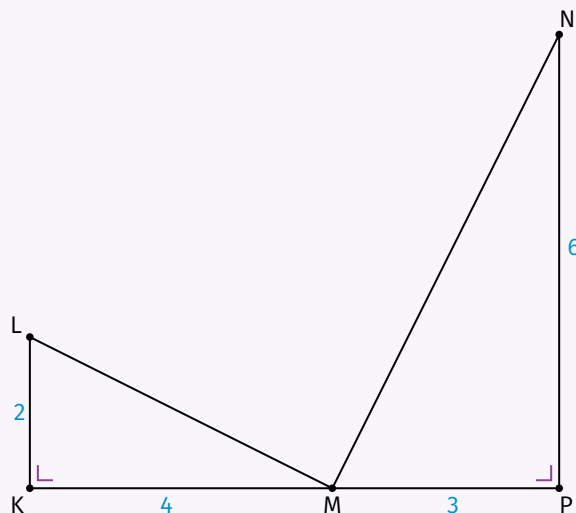
33

Toon aan dat de driehoeken gelijkvormig zijn.

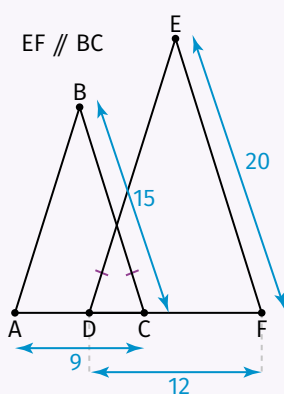
a)



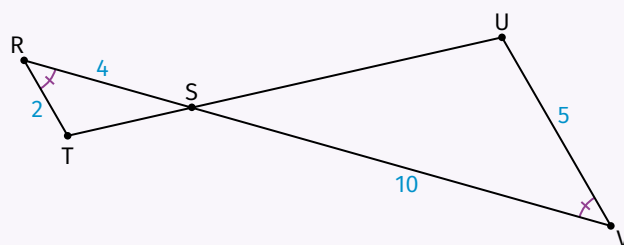
c)



b)



d)



a) In $\triangle ABC$ en $\triangle ADE$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A} \quad (\text{gemeenschappelijke hoek}) \\ \hat{B} = \hat{D} \quad (\text{overeenkomstige hoeken bij } BC \parallel DE \text{ en snijlijn } AD) \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ABC \sim \triangle ADE$$

b) In $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} = 0,75 \\ \hat{C} = \hat{F} \quad (\text{overeenkomstige hoeken bij } EF \parallel BC \text{ en snijlijn } AF) \end{array} \right\} \xRightarrow{\frac{Z}{H} \frac{Z}{Z}} \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

c) In $\triangle KLM$ en $\triangle PMN$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{|KL|}{|PM|} = \frac{|KM|}{|PN|} = \frac{2}{3} \\ \hat{K} = \hat{P} = 90^\circ \quad (\text{gegeven}) \end{array} \right\} \xRightarrow{\frac{Z}{H} \frac{Z}{Z}} \triangle KLM \sim \triangle PMN$$

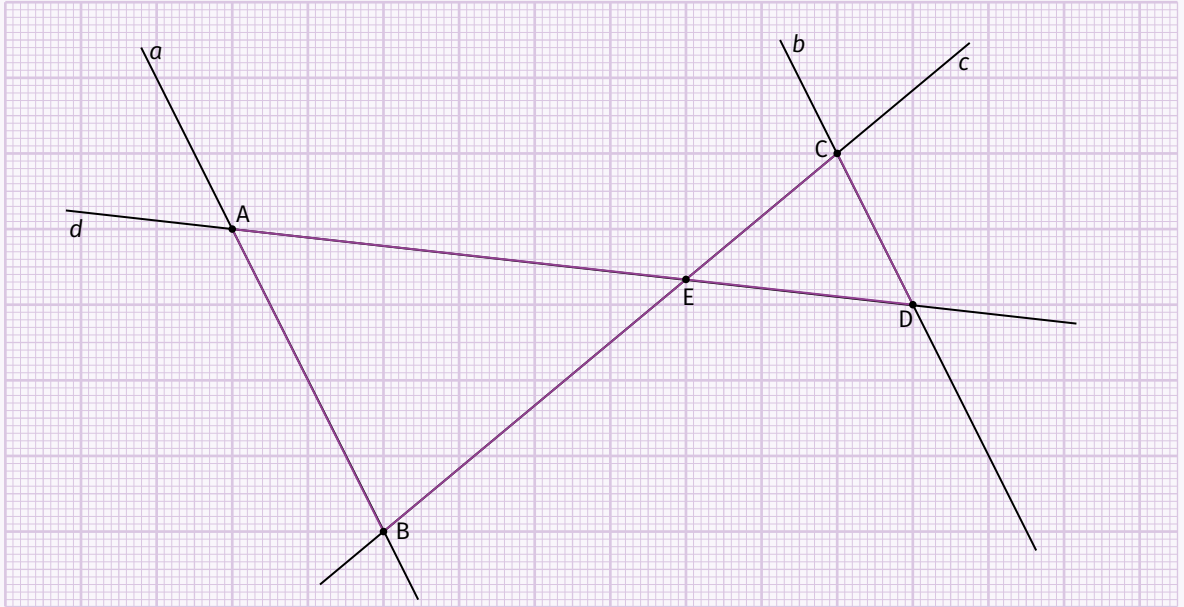
d) In $\triangle RST$ en $\triangle VSU$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{|RT|}{|VU|} = \frac{|RS|}{|VS|} = 0,4 \\ \hat{R} = \hat{V} \quad (\text{gegeven}) \end{array} \right\} \xRightarrow{\frac{Z}{H} \frac{Z}{Z}} \triangle RST \sim \triangle VSU$$



34

De rechten a en b zijn evenwijdig met elkaar. De rechten c en d snijden elkaar in het punt E . Bewijs dat de driehoeken ABE en DCE gelijkvormig zijn.



bv.

In $\triangle ABE$ en $\triangle DCE$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{AEB} = \hat{CED} \text{ (overstaande hoeken)} \\ \hat{A} = \hat{D} \text{ (verwisselende binnenhoeken bij } a \parallel b \text{ en snijlijn } d) \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ABE \sim \triangle DCE$$



35

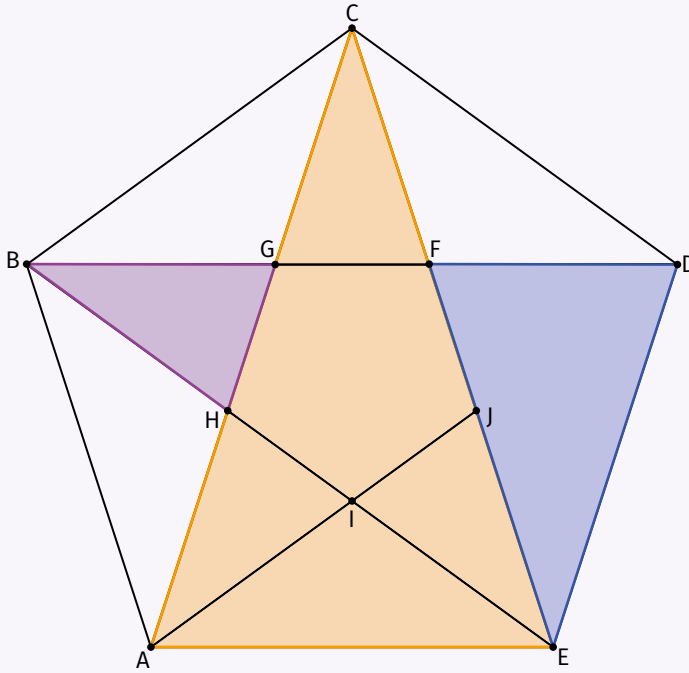
Waar of niet waar?

- Twee driehoeken met een gelijke omtrek zijn steeds congruent.
- Twee rechthoekige driehoeken zijn steeds gelijkvormig.
- Twee gelijkbenige driehoeken met een gelijke omtrek zijn steeds congruent.
- Twee rechthoekige driehoeken met twee paar even lange zijden zijn steeds congruent.
- Twee vierkanten zijn steeds gelijkvormig.
- Twee gelijkzijdige driehoeken zijn steeds gelijkvormig.
- Als we elke zijde van een driehoek met 3 cm verlengen, krijgen we een gelijkvormige driehoek.
- Als we de zijde van een vierkant verdubbelen, dan krijgen we een gelijkvormig vierkant. De oppervlakte is dan ook dubbel zo groot.
- Twee gelijkbenige driehoeken met een even grote hoek van 30° zijn steeds gelijkvormig.

- | | | |
|--------------|--------------|--------------|
| a) niet waar | d) niet waar | g) niet waar |
| b) niet waar | e) waar | h) niet waar |
| c) niet waar | f) waar | i) niet waar |



In een regelmatige vijfhoek werden alle diagonalen getekend. De diagonalen sluiten in het midden een nieuwe regelmatige vijfhoek in. Toon aan dat de gekleurde driehoeken gelijkvormig zijn.



TIP

- In een regelmatige veelhoek zijn alle zijden even lang en zijn alle hoeken even groot.
- $AE \parallel BD$
- $ED \parallel AC$

a) Te bewijzen: $\triangle ACE \sim \triangle DEF$

Bewijs:

In $\triangle ACE$ en $\triangle DEF$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AEC} = \widehat{DFE} \text{ (verwisselende binnenhoeken bij } AE \parallel BD \text{ en snijlijn CE)} \\ \widehat{A} = \widehat{D} \text{ (overstaande hoeken in het parallellogram AGDE)} \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ACE \sim \triangle DEF$$

b) Te bewijzen: $\triangle FED \sim \triangle HBG$

Bewijs:

In $\triangle FED$ en $\triangle HBG$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{F} = \widehat{H} \text{ (} \widehat{F} = \widehat{H} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ \text{ want elke hoek in een regelmatige vijfhoek is } 108^\circ \text{)} \\ \widehat{D} = \widehat{G} \text{ (overeenkomstige hoeken bij } AC \parallel ED \text{ en snijlijn BD)} \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle FED \sim \triangle HBG$$



37

In een driehoek ABC zijn de hoogtelijnen AD en BE getekend met $D \in BC$ en met $E \in AC$.
Bewijs dat $\triangle DEC$ gelijkvormig is met $\triangle ABC$.

In $\triangle ADC$ en $\triangle BEC$ geldt:

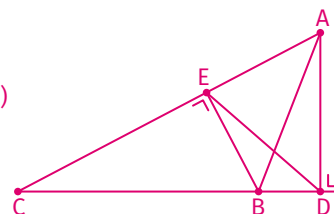
$$\left. \begin{array}{l} \hat{D} = \hat{E} = 90^\circ \quad (\text{gegeven}) \\ \hat{C} = \hat{C} \quad (\text{gemeenschappelijke hoek}) \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ADC \sim \triangle BEC$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|DC|}{|EC|} = \frac{|AD|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|BC|} \quad (1)$$

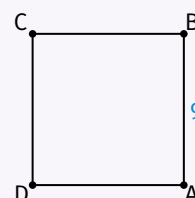
In $\triangle DEC$ en $\triangle ABC$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{|DC|}{|AC|} = \frac{|EC|}{|BC|} \quad (\text{uit (1)}) \\ \hat{C} = \hat{C} \quad (\text{gemeenschappelijke hoek}) \end{array} \right\} \xRightarrow{\frac{Z}{Z} - \frac{Z}{Z}} \triangle DEC \sim \triangle ABC$$



38

Bereken x als je weet dat $ABCD \sim EFGH$. De gelijkvormigheidsfactor is $\frac{1}{3}$.

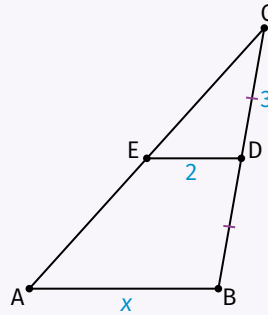


$$\begin{aligned} \frac{|HG|}{|AB|} &= \frac{1}{3} \\ \frac{x}{9} &= \frac{1}{3} \\ x &= \frac{9}{3} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

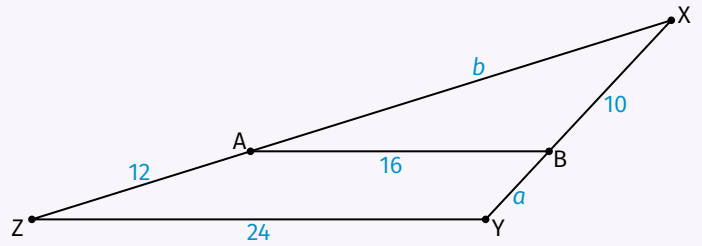


Toon in de volgende oefeningen eerst aan dat de driehoeken gelijkvormig zijn.

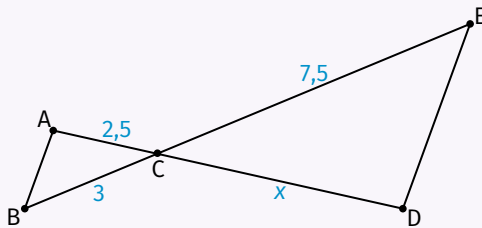
a) Bereken x als je weet dat $ED \parallel AB$.



c) Bereken a en b als je weet dat $AB \parallel YZ$.

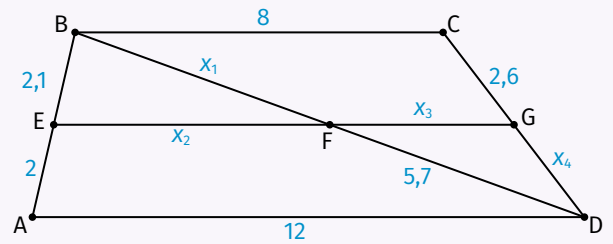


b) Bereken x als je weet dat $AB \parallel ED$.



d) ABCD is een trapezium en $EG \parallel AD$.

Bereken x_1, x_2, x_3 en x_4 .



a) In $\triangle ABC$ en $\triangle EDC$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{C} \text{ (gemeenschappelijke hoek)} \\ \hat{D} = \hat{B} \text{ (overeenkomstige hoeken bij } AB \parallel ED \text{ en snijlijn BC)} \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ABC \sim \triangle EDC$$

$$\frac{|AB|}{|ED|} = \frac{|BC|}{|DC|}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{6}{3}$$

$$x = 2 \cdot 2$$

$$x = 4$$

b) In $\triangle ABC$ en $\triangle DEC$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{ACB} = \hat{ECD} \text{ (overstaande hoeken)} \\ \hat{A} = \hat{D} \text{ (verwisselende binnenhoeken bij } AB \parallel ED \text{ en snijlijn AD)} \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ABC \sim \triangle DEC$$

$$\frac{|CD|}{|CA|} = \frac{|CE|}{|CB|}$$

$$\frac{x}{2,5} = \frac{7,5}{3}$$

$$x = \frac{7,5 \cdot 2,5}{3}$$

$$x = 6,25$$

c) In $\triangle XYZ$ en $\triangle XBA$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{X} = \hat{X} \quad (\text{gemeenschappelijke hoek}) \\ \hat{XAB} = \hat{XZY} \quad (\text{overeenkomstige hoeken} \\ \text{bij } AB \parallel YZ \text{ en snijlijn } XZ) \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle XYZ \sim \triangle XBA$$

$$\frac{|ZY|}{|AB|} = \frac{|XY|}{|XB|}$$

$$\frac{24}{16} = \frac{a+10}{10}$$

$$1,5 = \frac{a+10}{10}$$

$$a+10 = 1,5 \cdot 10$$

$$a+10 = 15$$

$$a = 15 - 10$$

$$a = 5$$

$$\frac{|ZY|}{|AB|} = \frac{|XZ|}{|XA|}$$

$$\frac{24}{16} = \frac{b+12}{b}$$

$$1,5 = \frac{b+12}{b}$$

$$1,5b = b+12$$

$$0,5b = 12$$

$$b = \frac{12}{0,5}$$

$$b = 24$$

d) In $\triangle ABD$ en $\triangle EBF$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{B} \quad (\text{gemeenschappelijke hoek}) \\ \hat{A} = \hat{E} \quad (\text{overeenkomstige hoeken} \\ \text{bij } EG \parallel AD \text{ en snijlijn } AB) \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ABD \sim \triangle EBF$$

In $\triangle CDB$ en $\triangle GDF$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{D} = \hat{D} \quad (\text{gemeenschappelijke hoek}) \\ \hat{G} = \hat{C} \quad (\text{overeenkomstige hoeken} \\ \text{bij } BC \parallel EG \text{ en snijlijn } CD) \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle CDB \sim \triangle GDF$$

$$\frac{x_1}{x_1 + 5,7} = \frac{2,1}{4,1}$$

$$4,1x_1 = 2,1(x_1 + 5,7)$$

$$4,1x_1 = 2,1x_1 + 11,97$$

$$4,1x_1 - 2,1x_1 = 11,97$$

$$2x_1 = 11,97$$

$$x_1 = 5,985$$

$$\frac{x_2}{12} = \frac{2,1}{4,1}$$

$$x_2 \cdot 4,1 = 2,1 \cdot 12$$

$$4,1x_2 = 25,2$$

$$x_2 = \frac{25,2}{4,1} \approx 6,15$$

$$\frac{x_3}{8} = \frac{5,7}{11,685}$$

$$11,685x_3 = 5,7 \cdot 8$$

$$11,685x_3 = 45,6$$

$$x_3 \approx 3,90$$

$$\frac{x_4}{x_4 + 2,6} = \frac{5,7}{11,685}$$

$$11,685x_4 = 5,7 \cdot (x_4 + 2,6)$$

$$11,685x_4 = 5,7x_4 + 14,82$$

$$11,685x_4 - 5,7x_4 = 14,82$$

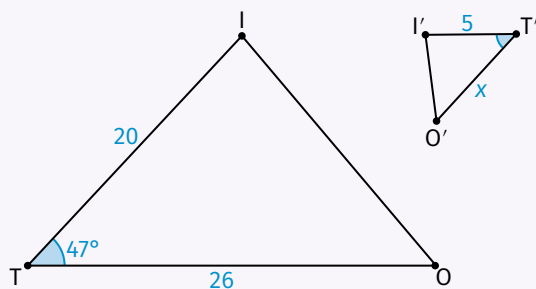
$$5,985x_4 = 14,82$$

$$x_4 \approx 2,48$$

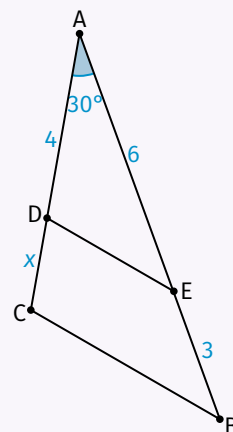


40

- a) Gegeven: $\triangle OIT \sim \triangle O'I'T'$
Bereken x en $\widehat{T'}$.



- b) Bereken x . Toon eerst aan dat $\triangle ABC \sim \triangle AED$.
Gegeven: $DE \parallel CB$



- a) $\widehat{T'} = \widehat{T} = 47^\circ$ (overeenkomstige hoeken)

$$\frac{|O'T'|}{|OT|} = \frac{|I'T'|}{|IT|}$$

$$\frac{x}{26} = \frac{5}{20}$$

$$x = \frac{5 \cdot 26}{20}$$

$$x = 6,5$$

- b) In $\triangle ABC$ en $\triangle AED$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A} \text{ (gemeenschappelijke hoek)} \\ \widehat{D} = \widehat{C} \text{ (overeenkomstige hoeken bij } DE \parallel CB \text{ en snijlijn AC)} \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ABC \sim \triangle AED$$

$$\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AE|}$$

$$\frac{x+4}{4} = \frac{6+3}{6}$$

$$\frac{x+4}{4} = 1,5$$

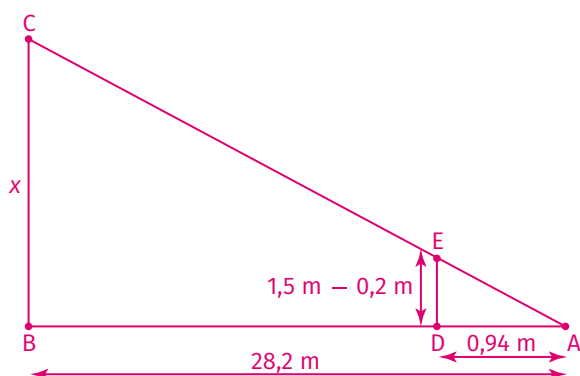
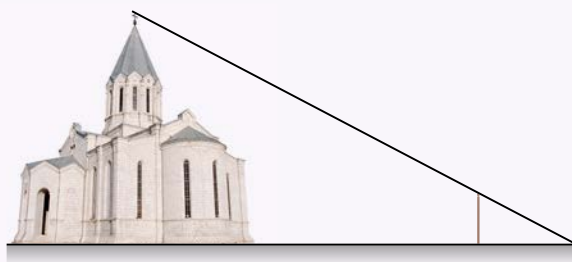
$$x+4 = 1,5 \cdot 4$$

$$x = 6 - 4$$

$$x = 2$$



Op het pleintje voor de kerk staat een paaltje. Het paaltje is 1,5 m lang, maar zit 20 cm in de grond. De schaduw van het paaltje is 94 cm lang. Op het zelfde ogenblik is de schaduw van de kerktoeren 28,2 m lang. Hoe hoog is de kerktoeren? Noteer je antwoord op 1 m nauwkeurig.



In $\triangle ABC$ en $\triangle ADE$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A} \quad (\text{gemeenschappelijke hoek}) \\ \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ \quad (\text{gegeven}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$$

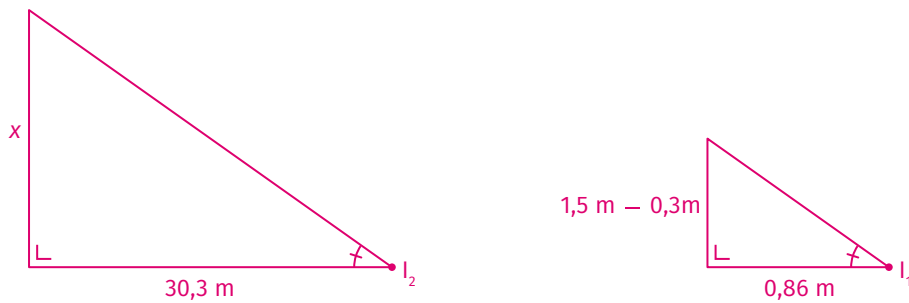
$$\begin{aligned} \frac{x}{1,5 \text{ m} - 0,2 \text{ m}} &= \frac{28,2 \text{ m}}{0,94 \text{ m}} \\ 0,94 \text{ m} \cdot x &= 1,3 \text{ m} \cdot 28,2 \text{ m} \\ x &= \frac{1,3 \text{ m} \cdot 28,2 \text{ m}}{0,94 \text{ m}} \\ x &= 39 \text{ m} \end{aligned}$$

Antwoord: De kerktoeren is 39 m hoog.



42

Een stok is 1,5 m lang. Deze stok wordt verticaal in de grond geplaatst zodat die 30 cm in de grond zit. De schaduw van deze stok is 86 cm lang. Op hetzelfde ogenblik is de schaduw van een toren 30,3 m. Bereken de hoogte van de toren. Maak een schets en vermeld je werkwijze. Noteer je antwoord op 1 cm nauwkeurig.



Beide driehoeken zijn gelijkvormig volgens het kenmerk HH, want:

- De stok en de toren staan beiden loodrecht op de grond (onder een hoek van 90°).
- De lichtstralen vallen in onder dezelfde hoek, dus $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$

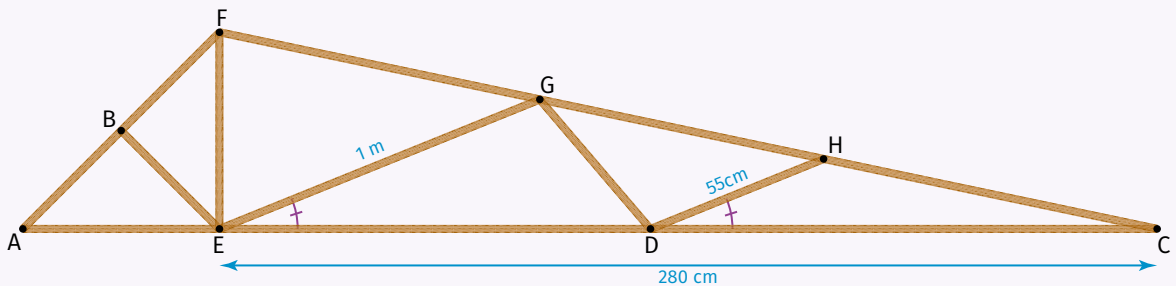
$$\begin{aligned}\frac{x}{1,5 \text{ m} - 0,3 \text{ m}} &= \frac{30,3 \text{ m}}{0,86 \text{ m}} \\ 0,86 \text{ m} \cdot x &= 1,2 \text{ m} \cdot 30,3 \text{ m} \\ x &= \frac{1,2 \text{ m} \cdot 30,3 \text{ m}}{0,86 \text{ m}} \\ x &\approx 42,28 \text{ m} (= 4228 \text{ cm})\end{aligned}$$

Antwoord: De toren is ongeveer 4228 cm hoog.



43

Bij het maken van een geraamte van een dak komen er dikwijls gelijkvormige driehoeken tevoorschijn. Bereken de lengte van het stuk hout dat in de tekening wordt voorgesteld door het lijnstuk [DC]. Toon eerst aan dat de driehoeken waarin je werkt gelijkvormig zijn.



In $\triangle EGC$ en $\triangle DHC$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{C} \text{ (gemeenschappelijke hoek)} \\ \hat{E} = \hat{D} \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle EGC \sim \triangle DHC$$

$$\frac{|DH|}{|EG|} = \frac{|DC|}{|EC|}$$

$$\frac{55 \text{ cm}}{100 \text{ cm}} = \frac{|DC|}{280 \text{ cm}}$$

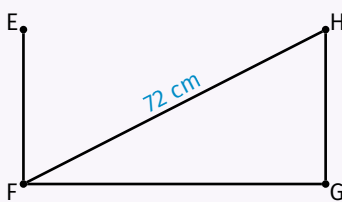
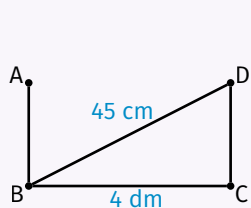
$$|DC| = \frac{55 \text{ cm}}{100 \text{ cm}} \cdot 280 \text{ cm}$$

$$|DC| = 154 \text{ cm}$$



44

Hieronder vind je het vooraanzicht van twee gelijkvormige balkvormige opbergdozen. Lisa wil een boek van 70 cm lang opbergen in de grootste doos. Is het mogelijk om het boek plat te leggen in de doos? Toon je antwoord aan met een berekening.



Gegeven: $\triangle BCD \sim \triangle FGH$

$$\frac{|FG|}{|BC|} = \frac{|FH|}{|BD|}$$

$$\frac{|FG|}{40 \text{ cm}} = \frac{72 \text{ cm}}{45 \text{ cm}}$$

$$|FG| = \frac{72 \text{ cm}}{45 \text{ cm}} \cdot 40 \text{ cm}$$

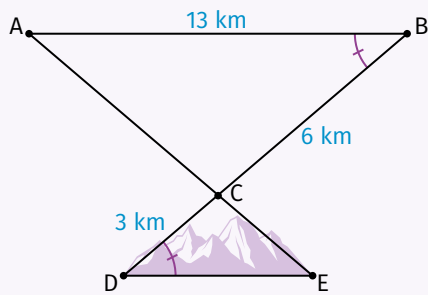
$$|FG| = 64 \text{ cm}$$

Antwoord: Het boek kan niet plat liggen in de doos.



45

De overheid wil een tunnel graven door een gebergte. Hiervoor wordt vanuit een luchtschip een luchtfoto gemaakt. Bepaal hoe lang de tunnel door dat gebergte zal zijn. Werk op 1 m nauwkeurig.



In $\triangle ABC$ en $\triangle EDC$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{D} = \hat{B} \quad (\text{gegeven}) \\ \hat{ACB} = \hat{DCE} \quad (\text{overstaande hoeken}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle EDC$$

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|BC|}$$

$$\frac{|DE|}{13 \text{ km}} = \frac{3 \text{ km}}{6 \text{ km}}$$

$$|DE| = \frac{3 \text{ km}}{6 \text{ km}} \cdot 13 \text{ km}$$

$$|DE| = 6,5 \text{ km}$$

$$|DE| = 6500 \text{ m}$$

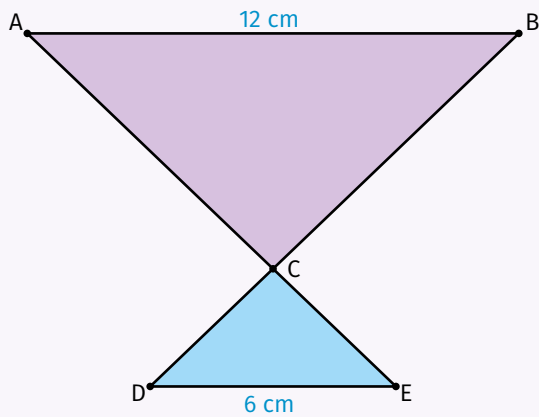
Antwoord: De tunnel zal 6500 m lang zijn.



46

Vul aan. De blauwe en de paarse figuur zijn telkens gelijkvormig.

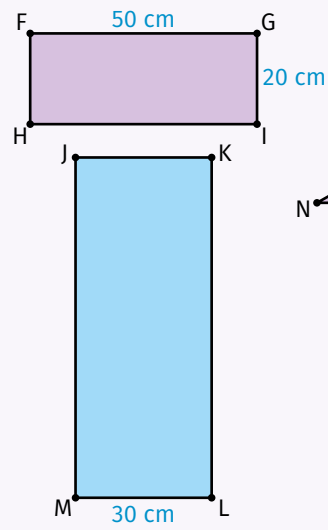
a)



$$p_{\text{paars}} = 24 \text{ cm}$$

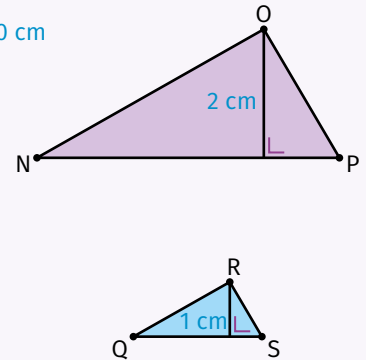
$$p_{\text{blauw}} = \dots$$

b)



$$A_{\text{blauw}} = \dots$$

c)



$$A_{\text{paars}} = 20 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{blauw}} = \dots$$

$$\text{a) } \frac{|DE|}{|AB|} = \frac{6 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = 0,5$$

$$\begin{aligned} p_{\text{blauw}} &= p_{\text{paars}} \cdot 0,5 \\ &= 24 \text{ cm} \cdot 0,5 \\ &= 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{|KL|}{|FG|} = \frac{|ML|}{|GI|}$$

$$\frac{|KL|}{50 \text{ cm}} = \frac{30 \text{ cm}}{20 \text{ cm}}$$

$$|KL| = \frac{30 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} \cdot 50 \text{ cm}$$

$$|KL| = 75 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{blauw}} &= |KL| \cdot |ML| \\ &= 75 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm} \\ &= 2250 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

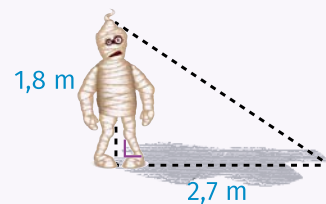
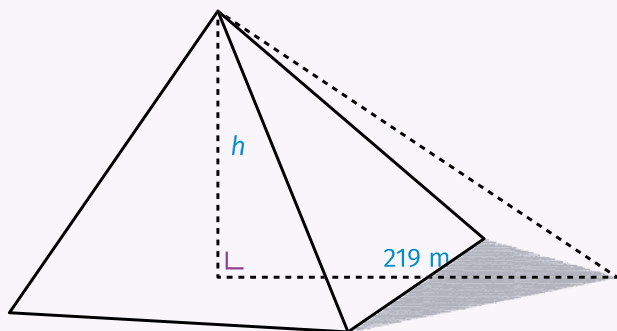
$$\text{c) } \frac{h_1}{h_2} = \frac{1 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 0,5$$

$$\begin{aligned} A_{\text{blauw}} &= 0,5^2 \cdot A_{\text{paars}} \\ &= 0,25 \cdot 20 \text{ cm}^2 \\ &= 5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



47

De stippellijnen geven weer hoe het zonlicht de schaduw van de piramide en de mummie vormt op hetzelfde tijdstip. Bereken de hoogte van de piramide. Toon eerst aan dat de driehoeken gelijkvormig zijn.



Beide driehoeken zijn gelijkvormig volgens het kenmerk HH, want de invalshoek is gelijk (het zonlicht valt in onder dezelfde hoek) en beide objecten staan loodrecht, dus onder een hoek van 90° , op de grond.

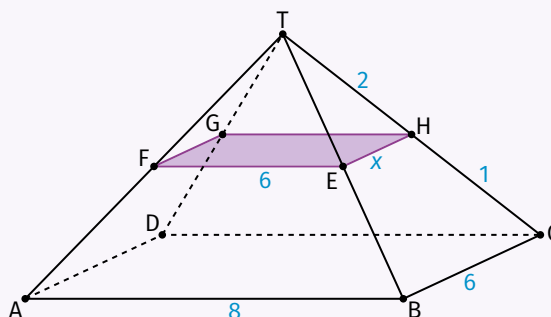
$$\begin{aligned}\frac{h}{1,8 \text{ m}} &= \frac{219 \text{ m}}{2,7 \text{ m}} \\ h &= \frac{219 \text{ m}}{2,7 \text{ m}} \cdot 1,8 \text{ m} \\ h &= 146 \text{ m}\end{aligned}$$

Antwoord: De piramide is 146 m hoog.



48

Bereken de oppervlakte van de rechthoek EFGH. Maak hiervoor gebruik van gelijkvormige figuren. Het gekleurde vlak is evenwijdig met het grondvlak.



$$ABCD \sim FEHG$$



$$\frac{|EH|}{|BC|} = \frac{|FE|}{|AB|}$$

$$\frac{x}{6} = \frac{6}{8}$$

$$x = \frac{6 \cdot 6}{8}$$

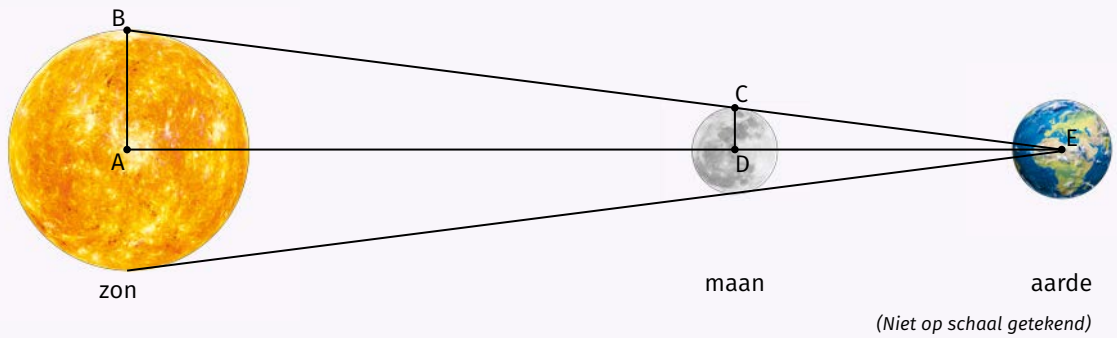
$$x = 4,5$$

$$\begin{aligned}A_{FEHG} &= |FE| \cdot |EH| \\ &= 6 \cdot 4,5 \\ &= 27\end{aligned}$$



49

De straal van de zon is ongeveer 700 000 km, de straal van de maan is 1738 km. De afstand van de aarde tot de zon is ongeveer 150 miljoen km. Bereken hoe ver de maan zich bevindt ten opzichte van de aarde in deze situatie. Werk op 0,1 km nauwkeurig.



$$\triangle ABE \sim \triangle DCE \quad (\text{want HH: } \hat{A} = \hat{D} \text{ en } \hat{E} = \hat{E})$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|DE|}{|AE|} = \frac{|DC|}{|AB|}$$

$$\frac{|DE|}{150\,000\,000} = \frac{1738}{700\,000}$$

$$|DE| = \frac{1738 \cdot 150\,000\,000}{700\,000}$$

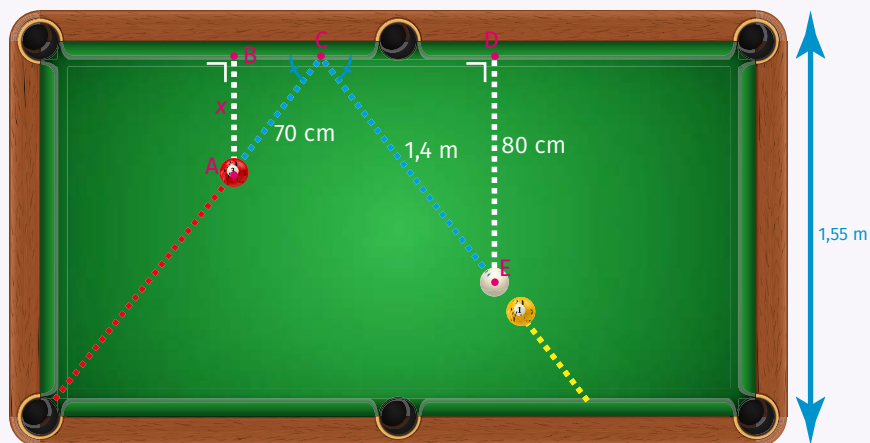
$$|DE| \approx 372\,428,6$$

Antwoord: In die situatie bevindt de maan zich op een afstand van ongeveer 372 428,6 km van de aarde.



50

Bereken hoe ver de rode bal van de rand (kleinste afstand) van de pooltafel ligt.



In $\triangle ABC$ en $\triangle EDC$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{D} \text{ (gegeven)} \\ \hat{C} = \hat{C} \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{HH}} \triangle ABC \sim \triangle EDC$$

$$\frac{x}{80} = \frac{70}{140}$$

$$x = \frac{70 \cdot 80}{140}$$

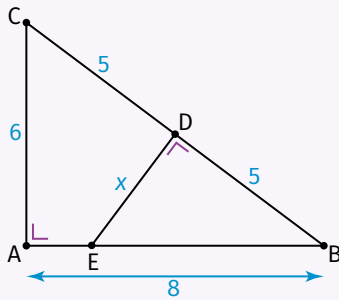
$$x = 40$$

Antwoord: De rode bal ligt op 40 cm van de rand van de pooltafel.



51

In een rechthoekige driehoek is D het midden van de schuine zijde. De rechthoekszijden meten 6 en 8. Bereken $|DE|$.



In $\triangle ABC$ en $\triangle DBE$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D} = 90^\circ \quad (\text{gegeven}) \\ \hat{ABC} = \hat{DBE} \quad (\text{gemeenschappelijke hoek}) \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ABC \sim \triangle DBE$$

$$\frac{|DE|}{|AC|} = \frac{|DB|}{|AB|}$$

$$\frac{x}{6} = \frac{5}{8}$$

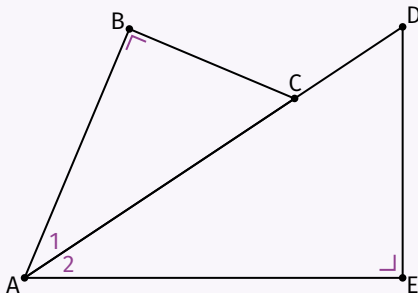
$$x = \frac{5 \cdot 6}{8}$$

$$x = 3,75$$



52

Zoek de lengte $|CD|$ als je weet dat: $|AB| = 5$, $|AE| = 7$, $|AC| = 6$ en $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$.



In $\triangle ABC$ en $\triangle AED$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \quad (\text{gegeven}) \\ \hat{B} = \hat{E} = 90^\circ \quad (\text{gegeven}) \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ABC \sim \triangle AED$$

$$\frac{|AC| + |CD|}{|AC|} = \frac{|AE|}{|AB|}$$

$$\frac{6 + |CD|}{6} = \frac{7}{5}$$

$$6 + |CD| = \frac{7 \cdot 6}{5}$$

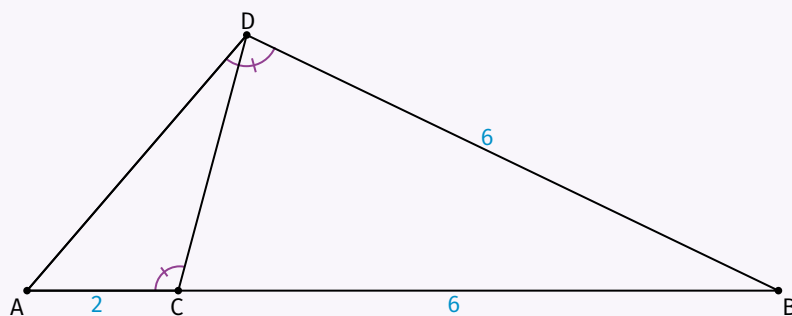
$$|CD| = 8,4 - 6$$

$$|CD| = 2,4$$



53

In driehoek ABD is het punt C zo gekozen dat $3|AC| = |BC|$.
Bereken $|CD|$.



In $\triangle ADB$ en $\triangle ACD$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{DAB} = \widehat{DAC} \text{ (gemeenschappelijke hoek)} \\ \widehat{ADB} = \widehat{ACD} \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ADB \sim \triangle ACD$$

Er geldt:

$$\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|CD|}{|DB|} = \frac{|AD|}{|AB|}$$

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{|CD|}{6} = \frac{|AD|}{8}$$

$$|AD|^2 = 16$$

$$|AD| = \sqrt{16}$$

$$|AD| = 4$$

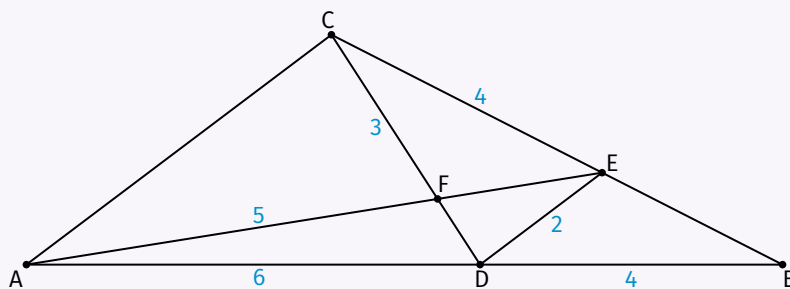
$$|CD| = \frac{4 \cdot 6}{8}$$

$$|CD| = 3$$



54

In de figuur hieronder is DE evenwijdig met AC.
Bereken $|AC|$ en $|BE|$.



In $\triangle ACB$ en $\triangle DEB$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{B} \quad (\text{gemeenschappelijke hoek}) \\ \hat{CAB} = \hat{EDB} \quad (\text{overeenkomstige hoeken bij} \\ \quad AC \parallel DE \text{ en snijlijn } AB) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle DEB$$

$$\frac{|AC|}{|DE|} = \frac{|CB|}{|EB|} = \frac{|AB|}{|DB|}$$

$$\frac{|AC|}{2} = \frac{4 + |EB|}{|EB|} = \frac{10}{4}$$

$$|AC| = \frac{10 \cdot 2}{4}$$

$$|AC| = 5$$

$$4 \cdot (4 + |EB|) = 10 \cdot |EB|$$

$$16 + 4|EB| = 10|EB|$$

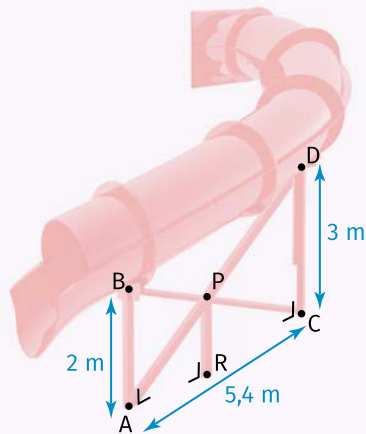
$$16 = 6|EB|$$

$$\frac{16}{6} = |EB|$$

$$\frac{8}{3} = |EB|$$

$$|EB| \approx 2,67$$





In $\triangle ABC$ en $\triangle RPC$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{R} = 90^\circ \quad (\text{gegeven}) \\ \hat{C} = \hat{C} \quad (\text{gemeenschappelijke hoek}) \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{HH}} \triangle ABC \sim \triangle RPC$$

$$\begin{aligned} \text{Er geldt: } \frac{|AB|}{|PR|} &= \frac{|BC|}{|PC|} = \frac{|AC|}{|RC|} \\ \frac{2}{|PR|} &= \frac{|BC|}{|PC|} = \frac{5,4}{|RC|} \\ \frac{2}{|PR|} &= \frac{5,4}{5,4 - |AR|} \\ |PR| &= \frac{2 \cdot (5,4 - |AR|)}{5,4} \end{aligned}$$

In $\triangle ADC$ en $\triangle APR$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A} \quad (\text{gemeenschappelijke hoek}) \\ \hat{C} = \hat{R} = 90^\circ \quad (\text{gegeven}) \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{HH}} \triangle ADC \sim \triangle APR$$

$$\begin{aligned} \text{Er geldt: } \frac{|CD|}{|PR|} &= \frac{|AD|}{|AP|} = \frac{|AC|}{|AR|} \\ \frac{3}{|PR|} &= \frac{|AD|}{|AP|} = \frac{5,4}{|AR|} \\ |PR| &= \frac{3 \cdot |AR|}{5,4} \end{aligned}$$

$$\frac{2 \cdot (5,4 - |AR|)}{5,4} = \frac{3 \cdot |AR|}{5,4}$$

$$10,8 - 2 \cdot |AR| = 3 \cdot |AR|$$

$$10,8 = 5 \cdot |AR|$$

$$2,16 = |AR|$$

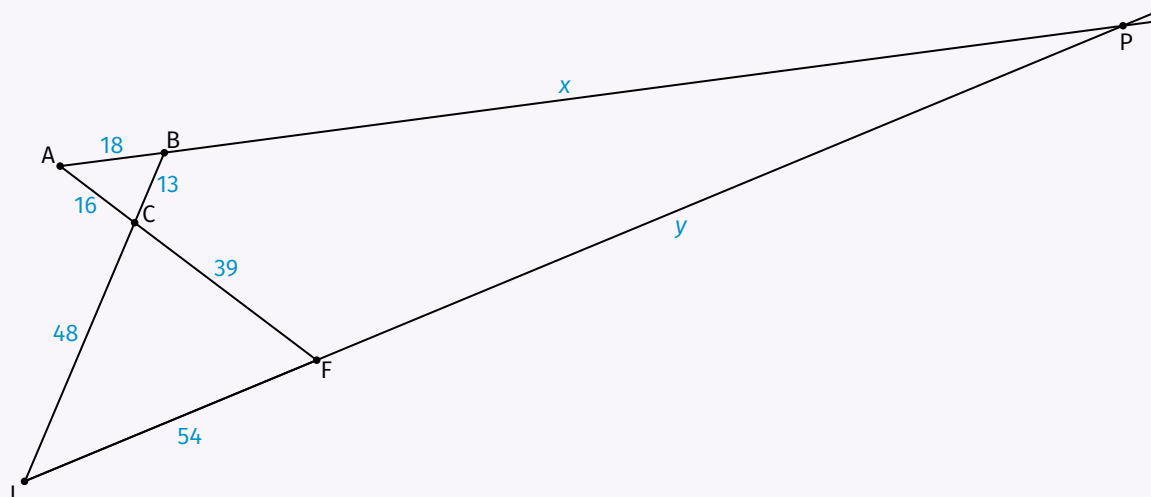
$$|PR| = \frac{3 \cdot 2,16}{5,4}$$

$$|PR| = 1,2$$



56

- a) Toon aan dat $\triangle IBP \sim \triangle AFP$.
b) Bereken $|BP|$ en $|FP|$.



- a) • In $\triangle ABC$ en $\triangle IFC$ geldt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{|AC|}{|IC|} &= \frac{|CB|}{|CF|} = \frac{|AB|}{|IF|} = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \xRightarrow{\frac{Z}{Z} \frac{Z}{Z} \frac{Z}{Z}} \triangle ABC \sim \triangle IFC$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{A} = \hat{I} \quad (1)$$

- In $\triangle IBP$ en $\triangle AFP$ geldt:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \hat{I} \quad (\text{zie (1)}) \\ \hat{P} &= \hat{P} \quad (\text{gemeenschappelijke hoek}) \end{aligned} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle IBP \sim \triangle AFP$$

- Stel $|FP| = y$

$$\frac{|IB|}{|AF|} = \frac{|BP|}{|FP|} = \frac{|IP|}{|AP|}$$

$$\frac{61}{55} = \frac{x}{y} = \frac{54+y}{18+x}$$

• $x = \frac{61}{55}y \quad (2)$

• $\frac{61}{55} = \frac{54+y}{18+\frac{61}{55}y}$

$$61 \left(18 + \frac{61}{55}y \right) = 55(54+y)$$

$$1098 + \frac{3721}{55}y = 2970 + 55y$$

$$\frac{3721}{55}y - 55y = 2970 - 1098$$

$$\frac{696}{55}y = 1872$$

$$y = \frac{1872 \cdot 55}{696}$$

$$y = \frac{4290}{29} \quad (3)$$

- (3) in (2)

$$\begin{aligned} x &= \frac{61}{55} \cdot \frac{4290}{29} \\ &= \frac{261690}{1595} \\ &= \frac{4758}{29} \end{aligned}$$

- Besluit :

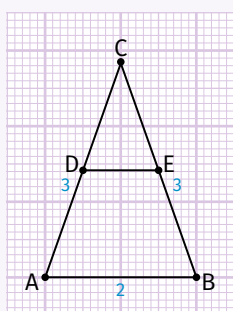
$$|BP| = \frac{4758}{29}$$

$$|FP| = \frac{4290}{29}$$



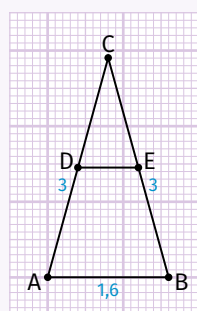
57

Controleer de eigenschap van de middenparallel in onderstaande figuren.



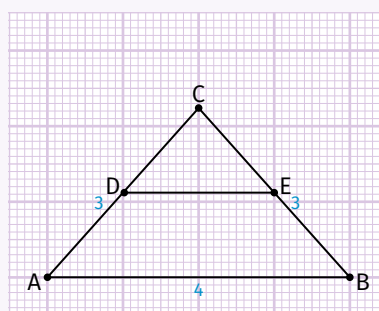
$$\begin{aligned} |DE| &= \dots \\ |AB| &= \dots \\ |DE| &= \dots |AB| \\ AB &\dots DE \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |DE| &= 1 \\ |AB| &= 2 \\ |DE| &= \frac{1}{2} |AB| \\ AB &\parallel DE \end{aligned}$$



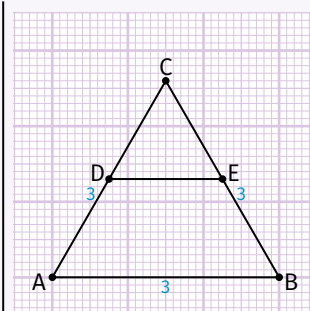
$$\begin{aligned} |DE| &= \dots \\ |AB| &= \dots \\ |DE| &= \dots |AB| \\ AB &\dots DE \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |DE| &= 0,8 \\ |AB| &= 1,6 \\ |DE| &= \frac{1}{2} |AB| \\ AB &\parallel DE \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} |DE| &= \dots \\ |AB| &= \dots \\ |DE| &= \dots |AB| \\ AB &\dots DE \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |DE| &= 2 \\ |AB| &= 4 \\ |DE| &= \frac{1}{2} |AB| \\ AB &\parallel DE \end{aligned}$$



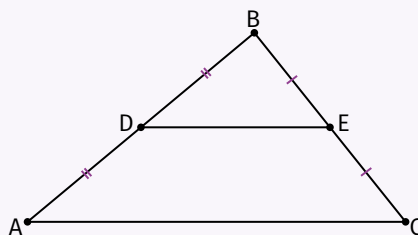
$$\begin{aligned} |DE| &= \dots \\ |AB| &= \dots \\ |DE| &= \dots |AB| \\ AB &\dots DE \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |DE| &= 1,5 \\ |AB| &= 3 \\ |DE| &= \frac{1}{2} |AB| \\ AB &\parallel DE \end{aligned}$$

58

Waar of niet waar? Gebruik eventueel de tekening.

- $|AC| = 2 |DE|$
- $|AC| = \frac{1}{2} |DE|$
- $|AD| = |DB|$
- $|AD| = \frac{1}{2} |DB|$
- $|BD| = |BE|$
- $|DE| = \frac{1}{2} |AC|$

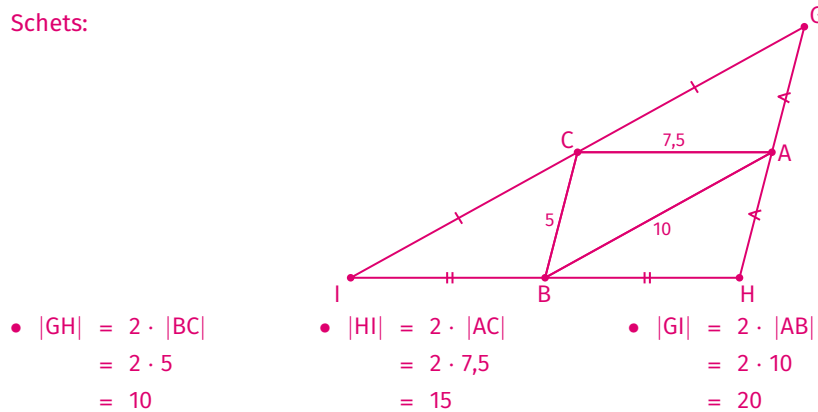


- waar
- niet waar
- waar
- niet waar
- niet waar
- waar

59

Gegeven: $\triangle GHI$ A is het midden van $[GH]$, B is het midden van $[HI]$ en C is het midden van $[GI]$. $|AC| = 7,5$; $|AB| = 10$ en $|BC| = 5$ **Gevraagd:** Bereken de lengtes van de zijden van $\triangle GHI$.

Schets:



60

In $\triangle ABC$ is M het midden van $[AB]$, N het midden van $[BC]$ en P het midden van $[AC]$.a) Toon aan dat $\triangle ABC \sim \triangle NPM$.

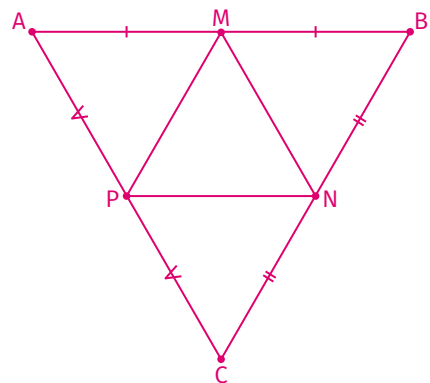
b) Toon aan dat NMPC een parallellogram is.

$$\left. \begin{aligned} a) \quad |PN| &= \frac{1}{2} |AB| \\ |MN| &= \frac{1}{2} |AC| \\ |PM| &= \frac{1}{2} |BC| \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{ZZZ} \\ &\text{ZZZ} \\ &\implies \triangle ABC \sim \triangle NPM \end{aligned}$$

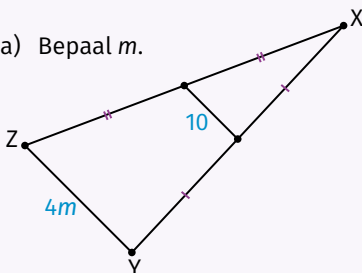
$$b) \quad \left. \begin{aligned} \bullet \quad |MP| &= \frac{1}{2} |BC| \implies |MP| = |NC| \\ |MN| &= \frac{1}{2} |AC| \implies |MN| = |PC| \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \bullet \quad MP &\parallel NC \text{ (eigenschap middenparallel)} \\ MN &\parallel PC \text{ (eigenschap middenparallel)} \end{aligned} \right\} (2)$$

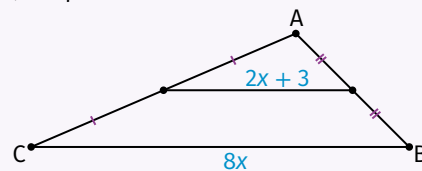
Uit 1 en 2 volgt: NMPC is een parallellogram.



61

a) Bepaal m .

$$\begin{aligned} a) \quad 4m &= 2 \cdot 10 \\ 4m &= 20 \\ m &= \frac{20}{4} \\ m &= 5 \end{aligned}$$

b) Bepaal x .

$$\begin{aligned} b) \quad 8x &= 2 \cdot (2x + 3) \\ 8x &= 4x + 6 \\ 8x - 4x &= 6 \\ 4x &= 6 \\ x &= \frac{6}{4} \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Een rechte die door het midden van een zijde van een driehoek gaat en die evenwijdig is met een andere zijde, gaat door het midden van de derde zijde. Bewijs deze omgekeerde eigenschap van de middenparallel.

Gegeven: zie figuur
 $M = \text{mi}[AC]$
 $MN \parallel BC$ en $N \in [AB]$

Te bewijzen: $|AN| = \frac{1}{2} |AB|$

Bewijs: In $\triangle AMN$ en $\triangle ABC$ geldt:

$$\hat{A} = \hat{A} \quad (\text{gemeenschappelijke hoek})$$

$$\hat{M}_1 = \hat{C} \quad (\text{overeenkomstige hoeken met } MN \parallel BC \text{ en snijlijn } AC)$$

$$\Downarrow \text{ HH}$$

$$\triangle AMN \sim \triangle ACB$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|AN|}{|AB|}$$

$$\Downarrow$$

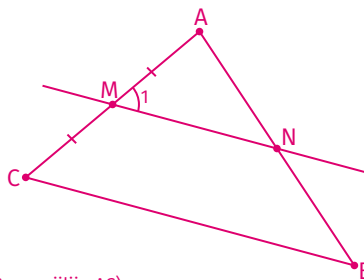
$$\frac{1}{2} = \frac{|AN|}{|AB|}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} |AB| = |AN|$$

$$\Downarrow$$

N is het midden van $[AB]$.

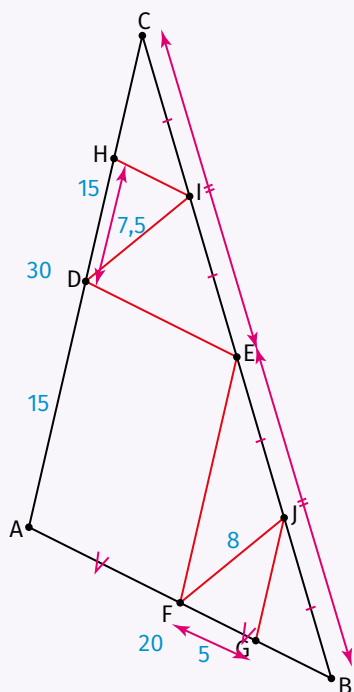


63

Bepaal de lengte van het rode pad als je weet dat $|AB| = 20$, $|AC| = 30$ en $|JF| = 8$.

D is het midden van $[AC]$, E is het midden van $[BC]$ en F is het midden van $[AB]$. H is het midden van $[CD]$ en G is het midden van $[BF]$.

$$|CI| = |IE| = |EJ| = |JB|$$



- $|DE| = \frac{1}{2} |AB| = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$

- $|HI| = \frac{1}{2} |DE| = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$

- $|JF| = 8 \implies |AE| = 2 \cdot 8 = 16$

- $|DI| = \frac{1}{2} |AE| = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$

- $|EF| = \frac{1}{2} |AC| = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$

- $|GJ| = \frac{1}{2} |EF| = \frac{1}{2} \cdot 15 = 7,5$

$$\implies \text{Totale lengte} = 10 + 5 + 8 + 8 + 15 + 7,5 = 53,5$$



64

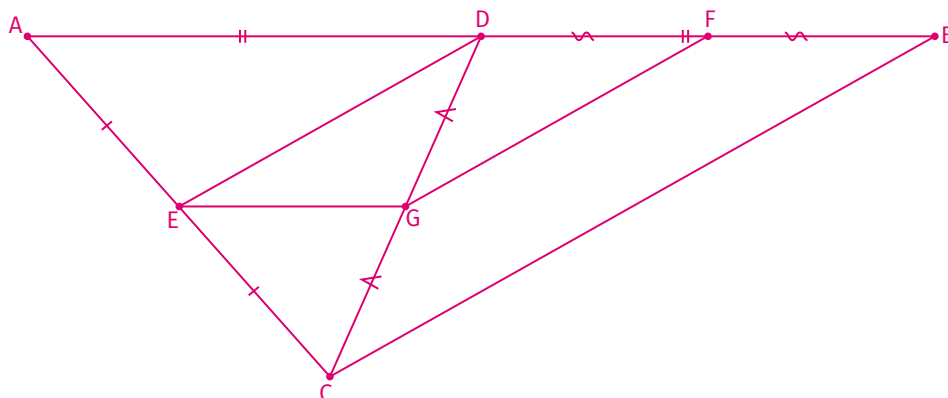
Teken een willekeurige $\triangle ABC$.

D is het midden van $[AB]$ en E is het midden van $[AC]$.

G is het midden van $[CD]$.

$[FG]$ is evenwijdig met $[BC]$ en snijdt $[AB]$ in F.

Waarom zijn de lijnstukken $[DE]$ en $[FG]$ even lang? Verklaar zo volledig mogelijk.



$[ED]$ is een middenparallel van $\triangle ABC$ (omdat E het midden is van $[AC]$ en D het midden is van $[AB]$)

$$\Downarrow$$

$$|ED| = \frac{1}{2} |BC| \quad (1)$$

$[GF]$ is een middenparallel van $\triangle DBC$ (omdat G het midden is van $[DC]$ en F het midden is van $[DB]$)

$$\Downarrow$$

$$|GF| = \frac{1}{2} |BC| \quad (2)$$

Uit 1 en 2 volgt: $|ED| = |GF|$



65

Los onderstaand meetkundig probleem op.

In $\triangle ABC$ is CN de bissectrice van $\widehat{C}$.

AN staat loodrecht op CN.

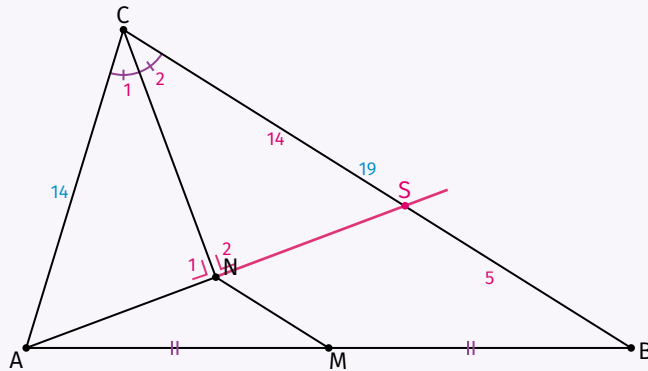
M is het midden van [AB].

$|AC| = 14$ en $|BC| = 19$.

Bereken $|MN|$.



TIP Trek AN door tot hij BC snijdt. Je zult doorheen je berekeningen moeten gebruik maken van congruente en gelijkvormige driehoeken.



1) In $\triangle ANC$ en $\triangle SNC$ geldt:

$$\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 \quad (\text{gegeven})$$

$$|CN| = |CN| \quad (\text{gemeenschappelijke zijde})$$

$$\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2 \quad (= 90^\circ, \text{gegeven})$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \text{ HZH} \\ \triangle ANC \cong \triangle SNC \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ |AC| = |CS| \quad (\text{overeenkomstige zijden zijn even lang}) \quad (**) \end{array}$$

en

$$|AN| = |NS| \quad (\text{overeenkomstige zijden zijn even lang}) \quad (*)$$

2) $[MN]$ is een middenparallel in $\triangle ABS$ want $M = \text{mi}[AB]$ en $N = \text{mi}[AS]$ (zie *)

3) Uit (**) volgt:

$$|BS| = |BC| - |CS|$$

$$|BS| = 19 - 14$$

$$|BS| = 5$$

4) Uit 2 en 3 volgt:

$$|MN| = \frac{1}{2} |BS|$$

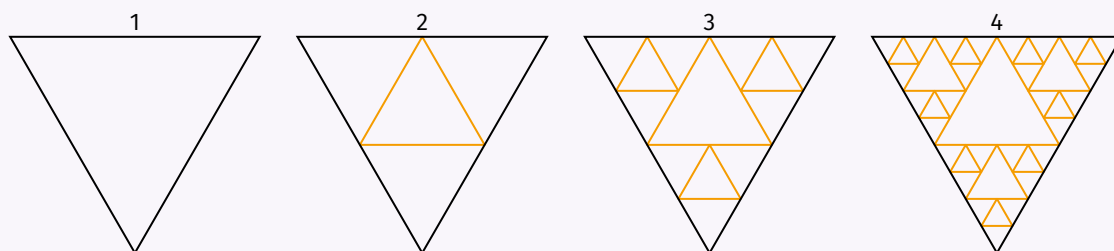
$$|MN| = \frac{1}{2} \cdot 5$$

$$|MN| = \frac{5}{2}$$

$$|MN| = 2,5$$



Vanuit een gelijkzijdige driehoek met omtrek 72 cm wordt volgend patroon gemaakt.



- Bepaal de omtrek van de oranje driehoek in figuur 2.
- Bepaal de totale omtrek van alle oranje driehoeken uit figuur 3.
- Bepaal de totale omtrek van alle oranje driehoeken uit figuur 4.

a) $72 = 3 \cdot z$

$24 = z$

Zijde oranje driehoek $= \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$ (eigenschap middenparallel)

Omtrek $= 3 \cdot 12 = 36$

b) Zijde kleinste driehoek $= \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (eigenschap middenparallel)

Omtrek 1 kleine $\Delta = 3 \cdot 6 = 18$

Totale omtrek $= 3 \cdot 18 + 36 = 54 + 36 = 90$

c) Zijde kleinste $\Delta = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ (eigenschap middenparallel)

Omtrek 1 kleinste $\Delta = 3 \cdot 3 = 9$

Totale omtrek $= 9 \cdot 9 + 90 = 81 + 90$
 $= 171$

